

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ INFORMATION TECHNOLOGY AND MATHEMATICAL MODELING

UDC 533.6.013.42

Oleksandr Trofymchuk, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Corresponding Member of NASU

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-3358-6274> **e-mail:** trofymchuk@nas.gov.ua

Oleksii Lebid, Doctor of Engineering Sciences, Senior Researcher, Deputy Director for Science

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-4003-8068> **e-mail:** o.g.lebid@gmail.com

Iurii Kaliukh, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Chief Researcher

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-7240-4934> **e-mail:** kalyukh2002@gmail.com

Institute of Telecommunications and Global Information Space of NASU, Kyiv, Ukraine

NONLINEAR WAVE MODEL OF TOWED SYSTEM AND NUMERICAL METHOD FOR ITS CALCULATION

Abstract. *Towed systems have found wide practical applications. Notable underwater systems for the long-distance extraction of minerals (concretions) from the ocean floor extend over 5-10 km. The existing mathematical models for solving dynamic problems of such systems in various environments are not entirely accurate regarding the diversity of wave processes. This necessitates the development of refined wave models. This article presents a new quasi-linear mathematical model describing the nonlinear four-mode dynamics of a towed system in a spatially inhomogeneous field of mass and surface forces. It is described by a nonlinear system of twelve first-order partial differential equations. The principles of boundedness and hyperbolicity are satisfied. The validation of the two-mode reduction of the model is based on the numerical solution of the problem of the propagation of two waves: longitudinal and configurational. Using a numerical algorithm and a program based on the finite difference method, a comparison of two difference schemes – Crank-Nicolson and Euler – was conducted. The main limitations for applying the finite difference method used for numerical modeling of wave propagation and reflection in a towed system are the peculiarities of the defining quasi-linear equations, which are related to the necessity of simultaneous computation of variables responsible for fast and slow processes. For such systems of equations, the term "singularly perturbed system of equations" is used. These perturbations result from the significant differences in the propagation speeds of longitudinal and configurational waves at the physical level. Consequently, it is necessary to employ special time-stepping regularization and filtering methods for numerical results. This imposes certain restrictions on the ability to model real processes and on the accuracy of the obtained results, necessitating the use of implicit difference schemes and high-frequency filtering.*

Keywords: *mathematical modeling, towed systems, waves, finite difference method, stability of computation.*

О.М. Трофимчук, О.Г. Лебідь, Ю.І. Калюх

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАНУ, Київ, Україна

НЕЛІНІЙНА ХВИЛЬОВА МОДЕЛЬ БУКСИРУВАНОЇ СИСТЕМИ ТА ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ЇЇ РОЗРАХУНКУ

Анотація. Буксировані системи знайшли широке застосування на практиці. Відомі підводні системи ерліфта великої протяжності для видобутку мінералів (конкрецій) з дна океану протяжністю в 5-10 км. Для вирішення завдань динаміки таких систем в різних середовищах відомі математичні моделі є не цілком коректними з точки зору врахування різноманіття хвильових процесів. Це визначає необхідність побудови уточнених хвильових моделей. У статті отримана нова квазілінійна математична модель, що описує нелінійну чотирьохмодову динаміку буксированої системи в просторово-неоднорідному полі масових і поверхневих сил. Вона описується нелінійною системою дванадцяти рівнянь першого порядку в часткових похідних. Для неї виконуються принципи граничності і гіперболічності. У сукупності з крайовими і початковими умовами модель може застосовуватися для опису динаміки і статички геометрично і фізично нелінійних стрижневих елементів, палів в ґрунті, канатів кранового обладнання, шахтних підйомників, підвісних канатних доріг, систем, що буксируються в потоці рідини і газу, ін. Апробація двохмодової редукованої моделі проведена на основі чисельного рішення задачі про поширення двох хвиль: поздовжніх і конфігураційних. За допомогою чисельного алгоритму і програми на основі методу скінченних різниць проведено порівняння двох різницевих схем: Кранка – Ніколсона та Ейлера. Основними обмеженнями для застосування методу скінченних різниць, використовуваного для чисельного моделювання поширення та відбиття хвиль у БС, є особливості визначальних квазілінійних рівнянь, що пов'язані з необхідністю одночасного обчислення змінних, відповідальних за швидкоплинні та повільні процеси. Для таких систем рівнянь використовується термін «сингулярно збурена система рівнянь». Ці збурення є наслідком значної різниці у швидкостях поширення поздовжніх, конфігураційних хвиль на фізичному рівні. У зв'язку з цим необхідно застосовувати спеціальні покровкові за часом методи регуляризації та фільтрації чисельних результатів. Це накладає певні обмеження на можливість моделювання реальних процесів та на точність отриманих результатів і змушує застосовувати неявні різницеві схеми та високочастотне фільтрування.

Ключові слова: математичне моделювання, буксировані системи, хвилі, метод скінченних різниць, стійкість розрахунку.

<https://doi.org/10.32347/2411-4049.2024.3.102-111>

Вступ

Буксирівані системи (БС) – це буксирівані системи постійної та змінної довжини в потоці рідини та газу, у космічному середовищі, підводні кабелі зв'язку, опори морських нафтових платформ та ін. Під це визначення підпадають усі механічні об'єкти, де один з лінійних розмірів як мінімум в 10-20 разів більший за два інших. БС знайшли широке застосування на практиці. Це космічні зв'язки на навколосезному просторі завдовжки десятки км; підводні нафто- та газопроводи; буксирівані системи (рис. 1 та рис. 2) [1-3]. Математичні моделі, що відображають динамічну поведінку БС в просторово-неоднорідному полі масових і поверхневих сил, зазвичай описуються нелінійними рівняннями в часткових похідних, вирішення яких можливе лише з використанням обчислювальних методів. Розвитком обчислювальних методів і алгоритмів, які можуть бути використані для математичного моделювання БС, активно займалися В.О. Горбань, Ю.Г. Кривонос, Ю.І. Калюх, І.В. Сергієнко, І.Т. Селезов, В.В. Скопечкий, ін.

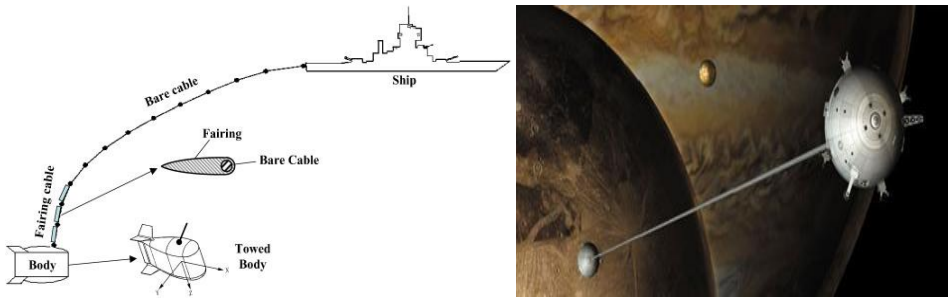


Рис. 1. Буксирівана в потоці рідини БС [2] Рис. 2. Космічні зв'язки [3]

Проблеми чисельного моделювання нелінійних задач динаміки БС полягають у наступному:

1. Геометричний розмір (вдоль БС) на декілька порядків перевищує розмір БС в поперечному напрямку. Це призводить до складнощів при розрахунку поперечних хвиль різної природи в БС (конфігураційних, згинальних, крутильних, депланаційних тощо) з одночасною необхідністю врахування поздовжніх хвиль.

2. Застосування проєкційних методів чисельного аналізу квазілінійних рівнянь динаміки БС призводить до присутності в матричних рівняннях коефіцієнтів при невідомих, що можуть відрізнятися один від одного на декілька порядків. Як добре відомо, це призводить до великих складнощів з обчисленням оберненої матриці цих рівнянь і до необхідності застосування спеціальних методів та алгоритмів подвійної точності і т. ін.

3. У зв'язку з великою чутливістю чисельних алгоритмів до похибок в початкових і крайових умовах, складно подолати розбавку чисельних алгоритмів. Для цього необхідно застосовувати спеціальні методи та програмні високочастотні фільтри.

4. Відомі математичні моделі БС є не цілком коректними з точки зору врахування різноманіття хвильових процесів. Це визначає необхідність побудови також уточнених багатохвильових моделей БС додатково до спеціальних чисельних методів та алгоритмів їх розрахунку [4].

Квазілінійна модель динаміки БС. Радіус-вектор початкового положення стрижня позначимо $\bar{R}_0(S, 0)$, а деформованого – $\bar{R}(S, t)$. Введемо деформацію елемента БС:

$$\varepsilon = \frac{(dS^2 - dS_0^2)}{dS_0^2} = \left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial S} \right|^2 - 1. \quad (1)$$

Тоді змінні S_0 і S , що характеризують недеформовану та розтягнуту довжину БС, будуть пов'язані між собою співвідношенням: $dS = \sqrt{1 + \varepsilon} \cdot dS_0$. (2)

Введемо природну систему координат з одиничними взаємоортогональними векторами \bar{t} , \bar{n} і \bar{b} . Вектор \bar{t} – одиничний вектор дотичної, визначається зі співвідношення:

$$\bar{t}(S, t) = \frac{\partial \bar{R}(S, t)}{\partial S}. \quad (3)$$

Два інших вектори – \bar{n} і \bar{b} – ортогональні до \bar{t} . Похідна радіус-вектора \bar{R} в деформованому стані має вигляд

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial S} = \bar{t}(1 + \varepsilon). \quad (4)$$

З іншого боку, для похідної від радіус-вектора $\bar{R}(S, t)$ - $\partial \bar{R} / \partial t$ маємо такий вираз:

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial t} = U_t \bar{t} + U_n \bar{n} + U_b \bar{b}. \quad (5)$$

Тут U_t, U_n і U_b – проєкції відносної швидкості на поточні одиничні вектори \bar{t}, \bar{n} і \bar{b} . Якщо долучити умови безперервності, існування похідних від радіус-вектора $\bar{R}(S, t)$ необхідного порядку та рівності змішаних похідних, то можемо отримати наступні вирази

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial U_t}{\partial S} - k_1 U_n - k_2 U_b; \quad -(1 + \varepsilon)\Omega_1 = \frac{\partial U_b}{\partial S} - k_2 U_t + k_3 U_n; \quad (1 + \varepsilon)\Omega_2 = \frac{\partial U_n}{\partial S} + k_1 U_t + k_3 U_b. \quad (6)$$

Повні похідні кривизни k_i за часом мають вигляд:

$$\frac{\partial k_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{n}}{\partial S} \bar{b} \right) = \frac{\partial b}{\partial t} \frac{\partial \bar{n}}{\partial S} + \bar{b} \left(\frac{\partial^2 \bar{n}}{\partial S \partial t} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\partial \bar{n}}{\partial S} \frac{1}{1 + \varepsilon} \right) \text{ або: } \frac{\partial k_3}{\partial t} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial S} - k_1 \Omega_1 - k_2 \Omega_2 - \frac{k_3}{1 + \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \quad (7)$$

За аналогією для k_1 і k_2 :

$$\frac{\partial k_1}{\partial t} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial S} + k_2 \Omega_3 + k_3 \Omega_1 - \frac{k_1}{1 + \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}; \quad \frac{\partial k_2}{\partial t} = -\frac{\partial \Omega_1}{\partial S} + k_3 \Omega_2 + k_1 \Omega_3 - \frac{k_2}{1 + \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \quad (8)$$

Запишемо загальні теореми про збереження кількості руху і збереження моменту кількості руху для елемента БС в векторній формі [5]:

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial S} + \bar{F}^{(E)} + \bar{F}^{(I)} + \bar{F}^{(M)} = 0; \quad \frac{\partial \bar{M}}{\partial S} + \bar{t} \times \bar{N} + \bar{M}^{(E)} + \bar{M}^{(I)} + \bar{M}^{(M)} = 0. \quad (9)$$

або в скалярному вигляді

$$\frac{\partial N_1}{\partial S} + k_1 N_3 - k_3 N_2 + \bar{F}^{(E)} \bar{n} + \bar{F}^{(I)} \bar{n} + \bar{F}^{(M)} \bar{n} = 0; \quad \frac{\partial N_2}{\partial S} + k_3 N_1 + k_2 N_3 + \bar{F}^{(E)} \bar{b} + \bar{F}^{(I)} \bar{b} + \bar{F}^{(M)} \bar{b} = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial S} - k_1 N_1 - k_2 N_2 + \bar{F}^{(E)} \bar{t} + \bar{F}^{(I)} \bar{t} + \bar{F}^{(M)} \bar{t} = 0.$$

З закону Гука для осевого зусилля для елемента БС випливає: $N_3 = EF\varepsilon$, (11) де E – модуль Юнга матеріалу БС, F – площа поперечного перерізу БС до деформації, ε – відносна поздовжня деформація БС. Запишемо умови збереження моменту кількості руху в проєкціях на одиничні взаємоортогональні вектори \bar{t} , \bar{n} і \bar{b} прийнятої системи координат [5]:

$$\frac{\partial M_2}{\partial S} + k_3 M_1 - k_3 M_3 + N_1 + \bar{m}^{(E)} \bar{b} + \bar{m}^{(I)} \bar{b} + \bar{m}^{(M)} \bar{b} = 0; \frac{\partial M_1}{\partial S} + k_1 M_3 - k_3 M_2 - N_2 + \bar{m}^{(E)} \bar{n} + \bar{m}^{(I)} \bar{n} + \bar{m}^{(M)} \bar{n} = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial S} + k_1 M_1 - k_2 M_2 + \bar{m}^{(E)} \bar{t} + \bar{m}^{(I)} \bar{t} + \bar{m}^{(M)} \bar{t} = 0;$$

Для згинальних моментів M_1, M_2 , а також M_3 приймемо співвідношення:

$$M_1 = -EI_{22} k_2; M_2 = EI_{11} k_1; M_3 = GJk; k = k_3 - \eta_3. \quad (13)$$

Тут I_{22}, I_{11}, J – моменти інерції, а η_3 – кут закручування одиниці довжини БС.

Отримана система рівнянь (10)–(13) описує фізично та геометрично нелінійну просторову модель динаміки БС. Однак вона є параболічно-гіперболічною, так як не враховано інерцію повороту поперечного перерізу БС. Модель (10)–(13) описує тільки чотири хвилі в БС з шести (поздовжні, крутильні, згинальні (дві)), а конфігураційні (поперечні) хвилі не описує. Для усунення цього недоліку гіперболізуємо модель (10)–(13) шляхом введення кутів α і β . Вони будуть характеризувати поворот поперечних перерізів БС, тобто деформацію зсуву в усередненому сенсі. Поперечні перерізи, плоскі до деформації, залишаються такими ж плоскими і після деформації, але, можливо, повернутими. Причому не обов'язково перпендикулярними до серединної осі БС. Матеріалізація цієї гіпотези для перерізуючих сил N_1 і N_2 набуває такого вигляду

$$N_1 = \alpha l_1 G F_s; N_2 = \beta l_2 G F_s, \quad (14)$$

де l_1, l_2 – коефіцієнти, що враховують вплив зсуву, F_s – площа поперечного перерізу БС. У підсумку, система рівнянь (11)–(15) може бути записана у вигляді одного матричного рівняння типу переносу в стандартній формі:

$$E \frac{\partial W}{\partial t} + B \frac{\partial W}{\partial S} = D. \quad (15)$$

Тут E – одинична матриця розмірності 12×12 , B – матриця конвективних членів 12×12 . Вектор-стовпець правих частин D визначається розподіленими масовими та поверхневими силами, а також моментами цих сил. Вектор-стовпець D залежить від часу t , лагранжевої координати S , вектора-стовпця невідомих W , компонент розподілених масових і поверхневих сил.

Крайові та початкові умови для моделі (15). У верхній частині БС (при $S = L$) можуть бути задані проекції швидкості \bar{U} :

$$U_t(L, t) = U_t^*(t); U_n(L, t) = U_n^*(t); U_b(L, t) = U_b^*(t). \quad (16)$$

На нижньому кінці БС (при $S = 0$) можуть бути задані умови динамічної рівноваги сил \bar{F}_i і моментів \bar{M}_j на кінці БС (наприклад, на транспортованому вантажеві (приладі) рис. 1, рис. 2):

$$\sum_{i=1}^3 \bar{F}_i = 0; \quad \sum_{j=1}^3 \bar{M}_j = 0. \quad (17)$$

В якості початкових умов використовується рішення задачі статки на основі моделі (15) при $\frac{\partial}{\partial t}(\dots) = 0$. Модель (15) з початковими та крайовими умовами (16)–(17) являє собою замкнуту систему квазілінійних рівнянь в часткових похідних, а також початково-крайову задачу.

Чисельний алгоритм. Дослідниками для чисельного вирішення крайової задачі (15)–(17) (у значно спрощеному вигляді, переважно в одно-двохвильовому наближенні) використовуються кілька підходів. Найбільш поширеними серед них є метод скінченних різниць (МСР). Серед неявних

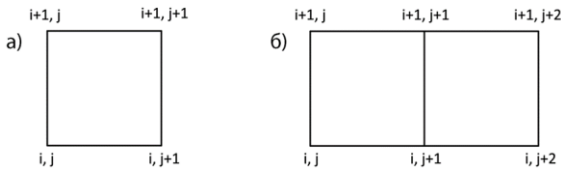


Рис. 3. Шаблони кінцево-різницевих схем Кранка – Нікольсон (а) та Ейлера (б)

різницевих схем розв’язання матричного рівняння переносу зупинимося на різницевих схемах Кранка – Нікольсон та Ейлера. Шаблони схем зображені

нижче на рис. 3. Матриця B і вектор-стовпець D є нелінійними функціями, які залежать від незалежних змінних t і S , а також інших змінних та параметрів. При порівняльному аналізі різницевих схем при розв’язанні рівняння (15) будемо виходити з квазілінеаризації коефіцієнтів матриці B і вектора-стовпця D на поточному розрахунковому кроці за часом t . При використанні різницевої схеми Кранка – Нікольсон для чисельного розв’язання системи нелінійних гіперболічних рівнянь труднощів при апроксимації крайових умов зазвичай не виникає. Застосування різницевої схеми Ейлера вимагає задання додаткових граничних умов. Розглянемо приклад БС у плоскій постановці (поздовжньо-конфігураційна (поперечна) взаємодія). На практиці зазвичай відомі чотири граничних умови: залежність координат верху БС від часу та гранична умова на її нижньому кінці. З них можна визначити крайові умови для чотирьох проєкцій швидкості – $U_t(0,t)$,

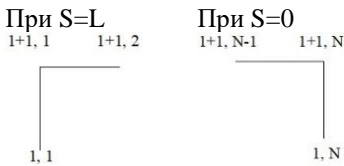


Рис. 4. Шаблони для апроксимації відсутніх граничних умов для $T(0,t)$, $\varphi(0,t)$ та $\varphi(L,t)$, $T(L,t)$ в схеми Ейлера, N – кількість елементів в різницевій схемі

$U_n(0,t)$, $U_t(L,t)$, $U_n(L,t)$. Крайові умови при цьому можна апроксимувати одним з відомих способів [5]. При використанні різницевої схеми Ейлера необхідні ще чотири граничних умови на $T(0,t)$, $\varphi(0,t)$ та $\varphi(L,t)$, $T(L,t)$ в плоскій задачі. Апроксимацію відсутніх граничних умов для $T(0,t)$, $\varphi(0,t)$ та $\varphi(L,t)$, $T(L,t)$ можна здійснити декількома способами. Ми використаємо наступні шаблони, що зображені на рис. 4, для лівого (верхнього) кінця БС і правого (нижнього)

кінця БС. Для порівняння ефективності та точності розв’язання рівнянь динаміки БС на основі різницевої схеми Ейлера і різницевої схеми Кранка – Нікольсон проведемо тестування чисельних алгоритмів та програм окремо та у порівнянні. Розглянемо обчислення модельної задачі для наступних крайових умов, де горизонтальна швидкість V на верхньому кінці БС при $S = L$:

$$V = \begin{cases} V_1 & t \leq 0 \\ V_1 + 0.05t & t \in [0; 20] \\ V_2 & t \in [20; \infty] \end{cases} \quad (18)$$

При таких фактичних даних БС: довжина системи – 200 м (L); коефіцієнт опору тертя – 0.01 (k_f); коефіцієнт опору форми – 0.2 (k_n); ефективний розтяг БС – 0.014 (e); ефективна ширина обтікача по міделю – 0.05 м (d_0); від’ємна плавучість лінії – 25,4 Н/м (ω); ефективна погонна маса (маса і приєднана

маса) обтікача – 2.5 кг/м ($m + M$); ефективна маса заглиблювача – 500 кг (M^*); його коефіцієнт опору – 0.5 (K^*); площа міделевого перерізу заглиблювача – 0.2 м² (Z^*); заглиблююча сила – 4000 Н (P^*).

Результати порівняльних розрахунків для відносних похибок у відсотках для різницевої схеми Кранка – Нікольсон наведено в таблиці 1, а для різницевої схеми Ейлера – в таблиці 2. Внаслідок сингулярності матриці B , для придушення шкідливих високочастотних осциляцій рішення застосовувалось усереднення результатів первісних розрахунків на трьох послідовних кроках за часом за формулою:

$$Y_i^J = \frac{Y_i^{J-1} + Y_i^J + Y_i^{J+1}}{3}. \quad (19)$$

Тут Y_i^J – позначення однієї з величин U_i, U_n, T, φ ; i – крок за координатою; J – крок за часом. Обчислення відносної похибки осьового зусилля T і кута нахилу φ , відносних дотичної u_t та нормальної u_n швидкостей БС здійснювалося за формулами:

$$\Delta T = \left| \frac{T_f - T}{T} \right|, \Delta \varphi = \left| \frac{\varphi_f - \varphi}{\varphi} \right|, \Delta u_t = \left| \frac{u_{t_f} - u_t}{u_t} \right|, \Delta u_n = \left| \frac{u_{n_f} - u_n}{u_n} \right|, \quad (20)$$

де $T_f, \varphi_f, u_{t_f}, u_{n_f}$ – значення змінних, отримані на подрібненій в два рази різницевій сітці Кранка – Нікольсон (Ейлера), T, φ, u_t, u_n – значення змінних, отримані на первісній різницевій сітці Кранка – Нікольсон (Ейлера).

Таблиця 1. Порівняння результатів розрахунків на різницевій схемі Кранка – Нікольсон при $\Delta t = 0.2$ сек. і $\Delta S = 30$ м, а також на подрібненій в два рази – при $\Delta t = 0.1$ сек. і $\Delta S = 15$ м

Час (с)	S (м)	$\Delta T, \%$	$\Delta \varphi, \%$	$\Delta u_t, \%$	$\Delta u_n, \%$
6.4	0	0,7	0,6	5,6	3,4
6.4	30	0,8	1,2	9,4	3,4
6.4	60	0,9	3,2	9,2	0,0
6.4	90	1,0	2,3	9,1	0,6
6.4	120	1,2	2,7	9,6	1,5
6.4	150	1,5	2,7	11,6	2,7
25.6	0	0,6	0,7	0,0	0,7
25.6	30	0,7	0,8	0,1	0,7
25.6	60	0,7	1,4	0,3	8,9
25.6	90	0,9	2,1	0,5	1,3
25.6	120	1,0	2,1	0,6	2,7
25.6	150	1,1	1,0	0,3	0,1
64.0	0	0,8	0,0	0,0	0,3
64.0	30	0,9	0,4	0,0	0,5
64.0	60	1,0	0,6	0,7	1,0
64.0	90	1,1	1,9	0,3	1,8
64.0	120	1,3	1,6	0,8	1,6
64.0	150	1,5	2,1	2,4	0,2

Таблиця 2. Порівняння результатів розрахунків на різницевій схемі Ейлера при $\Delta t = 0.2$ сек. і $\Delta S = 30$ м, а також на подрібненій в два рази ($\Delta t = 0.1$ сек. і $\Delta S = 15$ м)

Час (с)	S (м)	$\Delta T, \%$	$\Delta \phi, \%$	$\Delta u_t, \%$	$\Delta u_n, \%$
6.4	0	1,3	0,0	0,0	1,0
6.4	30	0,2	6,1	3,1	1,8
6.4	60	1,0	0,3	0,5	5,3
6.4	90	1,2	4,9	5,03	4,5
6.4	120	0,8	12,7	4,0	6,3
6.4	150	0,4	5,7	2,4	10,6
12.8	0	3,1	1,6	0,4	1,3
12.8	30	3,6	2,7	1,6	8,4
12.8	60	3,0	8,0	1,1	6,0
12.8	90	5,8	10,1	2,2	6,0
12.8	120	2,1	18,2	5,3	26,3
12.8	150	10,1	24,4	38,0	25,0
64.0	0	7,1	1,7	4,8	15,5
64.0	30	8,3	2,1	15,4	19,8
64.0	60	7,4	2,1	1,6	6,4
64.0	90	12,2	35,1	11,3	9,5
64.0	120	8,4	5,5	2,1	44,2
64.0	150	23,4	11,3	2,7	72,9

Порівняльний аналіз похибок різницевої сітки Кранка – Нікольсон та Ейлера проведемо по максимальній похибці в один момент часу. З табл. 1 випливає, що чисельний алгоритм на основі різницевої схеми Кранка – Нікольсон має необхідну точність і може бути використаний для чисельного моделювання перехідних процесів в БС. При цьому різниця в силових і геометричних характеристиках напружено-деформованого стану БС, отриманих на грубій і подрібненій різницевої сітці, є *незначною* (в середньому не більше 5–8%), крім перехідного режиму руху з прискоренням, коли відмінності можуть збільшуватися до 20%. З табл. 2 випливає, що чисельний алгоритм на основі різницевої схеми Ейлера має меншу точність у порівнянні з різницевою схемою Кранка – Нікольсон, а тому її використання для чисельного моделювання перехідних процесів в БС залишається під питанням. Різниця в силових і геометричних характеристиках БС, отриманих на грубій і подрібненій різницевій схемі Ейлера, є більшою в порівнянні з відмінностями при використанні різницевої схеми Кранка – Нікольсон.

Висновки

1. Незважаючи на численні дослідження, проведені в області вивчення статички і динаміки БС, неясними залишаються багато особливостей їх поведінки: проблеми петлеутворення в БС при буксируванні в космосі, повітрі та водному середовищі, правильний вибір коефіцієнта динамічності при складних маневрах буксирувальника і т.д. [6-14].

2. Розглянуто особливості застосування МСР для обчислення нелінійних динамічних задач БС. Основними обмеженнями для застосування МСР, використовуюваного для чисельного моделювання поширення та відбиття хвиль у БС, є особливості визначальних квазілінійних рівнянь, що пов'язані з необхідністю одночасного обчислення змінних, відповідальних за швидкоплинні та повільні процеси. При розв'язанні СЛАР, враховуючи погану обумовленість матриці, експериментальним обчислювальним шляхом було обрано метод регуляризації.

3. Розрахунки за різницевою схемою Кранка – Нікольсон навіть на грубих сітках можуть давати результати з необхідним ступенем точності. Причому витрати часу при цьому будуть мінімальними. Інша картина спостерігається при порівнянні результатів на грубій і більш дрібній сітках для різницевої схеми Ейлера. Непереборні помилки, що вносяться похибками апроксимації відсутніх граничних умов, призводять до більших відмінностей.

REFERENCES

1. Mechanical behavior of submarine cable under coupled tension, torsion and compressive loads. Retrieved 12.02.2021 from: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0029801819304470>
2. Combination of Acoustics with High Resolution Oceanography. Retrieved 12.02.2021 from: https://www.researchgate.net/publication/228540255_Combination_of_Acoustics_with_High_Resolution_Oceanography/figures?lo=1
3. Jelektrodinamicheskie svjazki [Electrodynamic connections]. Retrieved 12.02.2021 from: <http://galspace.spb.ru/index116.html>
4. Selezov, I.T. (2018). Development and Application of the Cauchy–Poisson Method to Layer Elastodynamics and the Timoshenko Equation. *Cybern Syst Anal*, 54, 434–442. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0044-x>
5. Hegemier, G.A., & Nair, S. (1977). A nonlinear dynamical theory for heterogeneous, anisotropic, elastic rods. *AIAA*, 15 (1), 8–15.
6. Kaliukh, I., & Berchun, Y. (2020). Four-Mode Model of Dynamics of Distributed Systems. *J. of Automation and Information Sciences*, 52 (2), 1–12.
7. Trofymchuk, O., Lebid, O., Berchun, V., Berchun, Y., & Kaliukh, I. (2022). Ukraine's Cultural Heritage Objects Within Landslide Hazardous Sites. In: Vayas, I., Mazzolani, F.M. (eds) *Protection of Historical Constructions. PROHITECH 2021. Lecture Notes in Civil Engineering*, vol 209. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90788-4_73
8. Kaliukh, I., Dunin, V., & Berchun, Y. (2018). Decreasing Service Life of Buildings Under Regular Explosion Loads. *Cybern Syst Anal*, 54, 948–956. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0098-9>
9. Kaliukh, I., Vasylenko, V., Berchun, Y., Vapnichna, V., Sedin, V., & Tytarenko, O. (2023). The Computational Intelligence application for assessing the technical state of a multi-storey building damaged by an explosion. In *2023 IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*, Kharkiv, Ukraine, 2023, (pp. 1–5). <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek61412.2023.10312914>
10. Kaliukh, I., Dunin, V., Trofymchuk, O., Marienkov, M. et al. (2023). Peculiarities of Applying the Risk Theory and Numerical Modeling to Determine the Resource of Buildings in a Zone of Influence of Military Actions. *Cybern Syst Anal*, 59, 612–623. <https://doi.org/10.1007/s10559-023-00596>
11. Trofymchuk, O.M., Dunin, V.A., & Kyrash, S.Y. (2022). Dynamic certification and assessment of the buildings life cycle under regular explosive impacts. *System research and information technologies*, 4, 100–118. <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2022.4.09>

12. Kaliukh, I., & Lebid, O. (2021). Constructing the Adaptive Algorithms for Solving Multi-Wave Problems. *Cybern Syst Anal*, 57, 938–949. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00419-w>
13. Kaliukh, I., Trofymchuk, O. & Lebid, O. (2023). Peculiarities of Applying the Finite-Difference Method for Solving Nonlinear Problems of the Dynamics of Distributed Systems in a Flow. *Cybern Syst Anal* 59, 120–133. <https://doi.org/10.1007/s10559-023-00548-4>
14. Trofymchuk, O., Kaliukh, Y., Dunin, V., & Berchun, Y. (2018). On the Possibility of Multi-Wavelength Identification of Defects in Piles. *Cybernetics and Systems Analysis*, 54, 600–609. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0061-9>

Стаття надійшла до редакції 05.06.2024 і прийнята до друку після рецензування 27.08.2024

The article was received 05.06.2024 and was accepted after revision 27.08.2024

Трофимчук Олександр Миколайович

доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАН України, директор Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАНУ
Адреса робоча: 03186 Україна, м. Київ, Чоколівський бульвар, 13
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-3358-6274> **e-mail:** trofymchuk@nas.gov.ua

Лебідь Олексій Григорович

доктор технічних наук, старший дослідник, заступник директора з наукової роботи Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України
Адреса робоча: 03186 Україна, м. Київ, Чоколівський бульвар, 13
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-4003-8068> **e-mail:** o.g.lebid@gmail.com

Калюх Юрій Іванович

доктор технічних наук, професор, головний науковий співробітник відділу природних ресурсів Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАНУ
Адреса робоча: 03186 Україна, м. Київ, Чоколівський бульвар, 13
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-7240-4934> **e-mail:** kalyukh2002@gmail.com