

ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ ТА СИСТЕМИ INFORMATION RESOURCES AND SYSTEMS

УДК 533.6.013.42

Oleksii G. Lebid, PhD, Senior Researcher

ORCID: 0000-0002-4003-8068, *e-mail*: o.g.lebid@gmail.com

Institute of Telecommunications and Global Information Space of NASU, Kyiv, Ukraine

FIVE-MODE QUASILINEAR MODEL OF NONLINEAR DYNAMICS OF EXTENDED SYSTEM

Abstract. *Distributed systems are widely used in practice. These are cosmic ligaments in the near-Earth space with a length of tens of kilometers. They approximate reinforced concrete piles in the soil when calculating the stress-strain state and assessing the technical condition; pipelines both in air and in liquid, underwater towed systems. Known underwater airlift systems of great length for the extraction of minerals (nodules) from the ocean floor with a length of 5-10 km. To solve the problems of the dynamics of such systems in various environments, the well-known mathematical models are not quite correct from the point of view of taking into account the variety of wave processes. It determines the need to build refined wave models. A new quasilinear mathematical model, which describes the nonlinear four-mode dynamics of the distributed system in the spatially inhomogeneous field of mass and surface forces, has been obtained. It is described by a nonlinear system of twelve first-order partial differential equations. For it, the principles of ultimate and hyperbolicity are fulfilled. Together with the boundary and initial conditions, it can be used to describe dynamics and statics of geometrically and physically nonlinear rod elements, piles in the ground, crane equipment ropes, mine lifts, aerial cableways, towed systems in liquid and gas flow, etc. For two-mode spatial reduction of the model, the theorem about correctness of Cauchy problem has been considered. As a result of the calculations, the earlier assumptions about the movement of the cable along its initial configuration were changed as the length of the cable changed. It has been found out that this assumption is only true for the initial transition participant. It is also established that at a given tachogram in the configuration of the towed line, there is a point of inflection, which shifts from top to bottom when lifting it. It can be a factor in the looping, contributing to the breakage of the cable system during towing.*

Keywords: *mathematical modeling; extended systems; waves; finite difference method; looping*

© О.Г. Лебідь, 2021

О.Г. Лебідь

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАНУ, м. Київ, Україна

П'ЯТИМОДОВА КВАЗІЛІНІЙНА МОДЕЛЬ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ ПРОТЯЖНОЇ СИСТЕМИ

***Анотація.** Розподілені системи знайшли широке застосування на практиці. Це космічні зв'язки у навколоремному просторі протяжністю в десятки кілометрів. Ними описуються залізобетонні палі в ґрунті при розрахунках напружено-деформованого стану й оцінці технічного стану; трубопроводи як в повітрі, так і в рідині; підводні буксирні системи. Відомі підводні системи ерліфта великої протяжності для видобутку мінералів (конкреції) з дна океану протяжністю в 5-10 км. Для вирішення завдань динаміки таких систем в різних середовищах відомі математичні моделі є не цілком коректними з точки зору врахування різноманіття хвильових процесів. Це визначає необхідність побудови уточнених хвильових моделей. У статті отримана нова квазілінійна математична модель, що описує нелінійну чотирьохмодову динаміку розподіленої системи в просторово-неоднорідному полі масових і поверхневих сил. Вона описується нелінійною системою дванадцяти рівнянь першого порядку в часткових похідних. Для неї виконуються принципи граничності і гіперболічності. У сукупності з крайовими і початковими умовами модель може застосовуватися для опису динаміки і статички геометрично і фізично нелінійних стрижневих елементів, палей в ґрунті, канатів кранового обладнання, шахтних підйомників, підвісних канатних доріг, систем що буксируються в потоці рідини і газу, ін. Для двохмодової просторової редукції моделі розглянута теорема про коректність задачі Коші. Апробація моделі проведена на основі чисельного рішення просторової задачі про поширення чотирьох хвиль трьох типів: поздовжніх, конфігураційних в напрямку нормалі і бінормалі, крутильних. За допомогою чисельного алгоритму і програми на основі методу скінченних різниць уточнені більш ранні припущення щодо руху кабелю вздовж початкової конфігурації буксирної лінії при зміні його довжини. З'ясувалося, що це припущення вірне лише для початкової перехідної ділянки. Встановлено також, що при заданій тахограмі в конфігурації буксирної лінії спостерігається точка перегину, яка зміщується зверху вниз при підйомі кабелю. Це може бути чинником, що сприяє обриву кабельної системи та петлеутворенню при буксируванні.*

***Ключові слова:** математичне моделювання; протяжні системи; хвилі; метод скінченних різниць; петлеутворення*

DOI: 10.32347/2411-4049.2021.2.104-120

Вступ

В даний час для проведення досліджень наукового, прикладного та військового характеру в космічному, повітряному і водному середовищах створюються і широко експлуатуються різні робототехнічні засоби, одним з основних елементів яких є протяжні системи (ПС) з фіксованою або змінною довжиною. Одним з цікавих застосувань є AN / ALE-50 [1]. AN / ALE-50 являє собою буксирну пастку, яка використовує електронні засоби протидії, щоб заманити ракети, що наближаються, подалі від військових літаків (рис. 1).

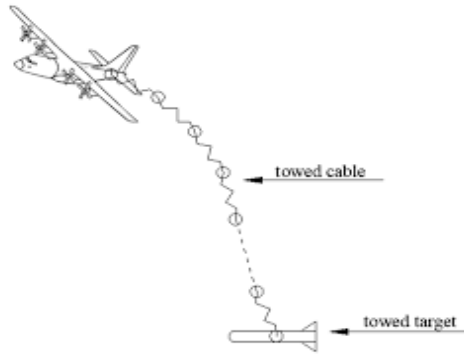


Рис. 1 – Загальний вид пастки (крупним планом) та літака, що буксирує пастку (на задньому плані) [1]

Пастка була створена в рамках спільного підприємства ВВС США, ВМС США і Raytheon. Пастка працює, створюючи більшу пляму на екрані радара протиповітряної оборони, ніж літак. Це робить її більш пріоритетною метою для системи наведення ракети, що наближається. Такі пастки захищали літаки від ракетних загроз при бойових операціях в Косово, Афганістані та Іраку. Систему можна використовувати практично на будь-якій бортовій платформі бойових літаків, що стоять на озброєнні США і НАТО. Пастка активно використовується на літаках F-16, F/A-18E/F і B-1B. Загальна кількість пасток, що створені на даний час, перевищує 25 000 штук [1]. При розгортанні пастка буксирується за літаком-господарем, захищаючи літак і його екіпаж від ракет з радіочастотним наведенням, заманюючи ракету в бік помилкової мети і від наміченої мети. Як в льотних випробуваннях, так і в реальних бойових умовах ALE-50 успішно відбивав численні бойові стрільби ракетами класу «земля – повітря» і «повітря – повітря». Американські військові льотчики прозвали пастку «Маленький приятель» (рис. 2) [1].



Рис. 2 – Протиповітряна ракета прямує в «Маленького приятеля». Сам літак залишається неушкодженим [1]

На рис. 3 і 4 показано застосування ПС в підводних й космічних середовищах. При розробці морських вітряних електростанцій ПС (підводні кабелі) є необхідними в якості засобів передачі енергії для з'єднання морських вітряних електростанцій і берегових підстанцій. Осьові сили є однією з основних причин пошкодження ПС (підводних кабелів), які складаються із спіральної броні, оболонки, ізоляції та проводів. На додаток до осьового подовження, коли кабель піддається розтягуючим навантаженням, спіральна броня також створює крутний момент. У глибоководних умовах вплив тиску води на жорсткість кабелю є важливим. В минулому такі дослідження проводилися рідко [2]. Коли кабель розташований на 4000 м нижче рівня моря, пов'язані розтягуючі, скручуючі і стискаючі навантаження можуть знизити жорсткість на розтяг ПС в цілому до 30%. Таким чином, при аналізі і проектуванні ПС (підводних кабелів) необхідно ретельно враховувати пов'язані ефекти навантажень: розтягування, скручування і стискання [2].

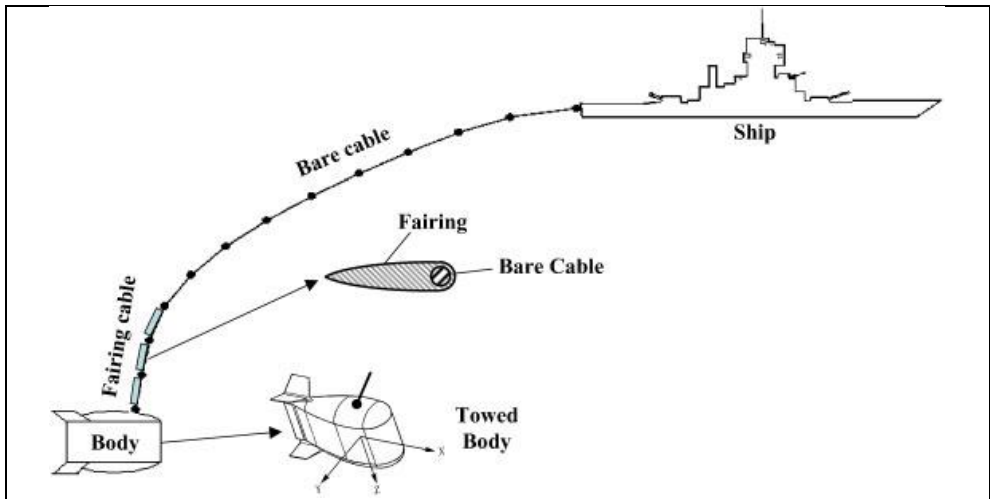


Рис. 3 – Буксирувана в потоці рідини ПС [3]

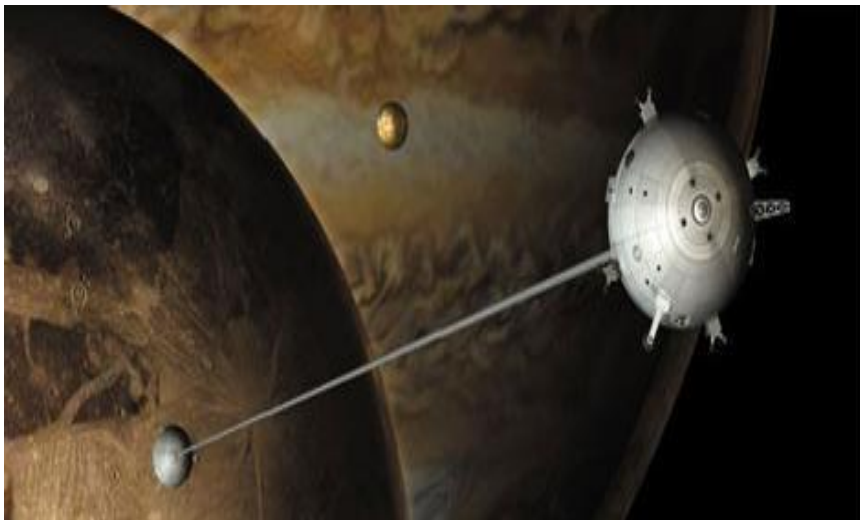


Рис. 4 – Космічні зв'язки [4]

Обертові ПС (стрижні) є елементами лопатей вертольотів, маніпуляторів, робочих лопаток парових і газових турбін, лопатей повітряних гвинтів (рис. 5).

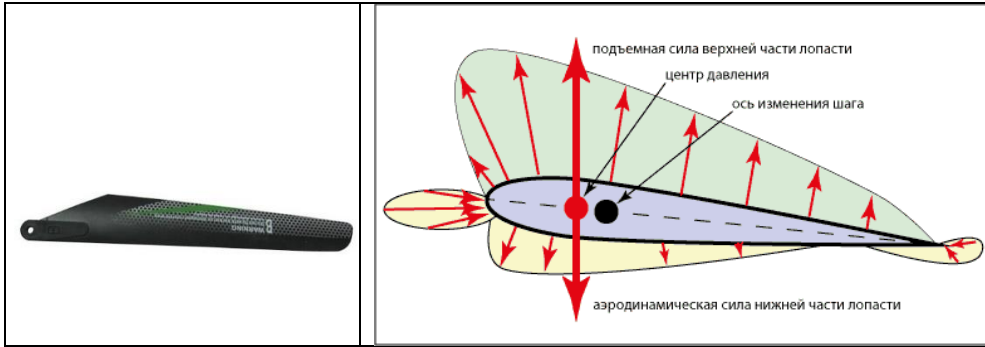


Рис. 5 – Вертолітна лопать та механізм створення підйомної сили

В експлуатації такі стрижневі конструкції часто здійснюють коливання, які можуть зумовити втомні пошкодження. Дослідження коливань цих систем ускладнюється тим, що вони мають несиметричний поперечний переріз. У цьому випадку центр ваги і центр вигину поперечного перерізу не збігаються. Здійснювалися спроби дослідження нелінійних коливань стрижнів з несиметричним поперечним перерізом. С.П. Тимошенко [5] отримав рівняння лінійних згинально-крутильних коливань прямих незакручених стрижнів з несиметричним поперечним перерізом. У роботах [6, 7] були отримані рівняння лінійних згинально-згинально-крутильно-поздовжніх коливань закручених обертових стрижнів з урахуванням депланації поперечного перерізу при зсуві і крученні.

У [8] представлена система рівнянь в часткових похідних, що описує геометрично нелінійні згинально-згинально-крутильно-поздовжні коливання обертового стрижня. У цих рівняннях враховувалося, що центр ваги поперечного перерізу і центр жорсткості знаходяться в одній точці. У [8] отримані рівняння, що описують згинально-згинально-крутильні коливання стержня з урахуванням нерозтяжності середньої лінії ПС. При цьому передбачалося, що центр ваги поперечного перерізу і центр жорсткості знаходяться в одній точці.

Систематичний виклад теорії гнучких стрижнів міститься в монографії [6]. В роботі [9] представлена система трьох нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь в часткових похідних, що описує згинально-згинально-крутильні коливання гнучкого обертового стрижня з урахуванням депланації поперечного перерізу. В [10] відзначається, що для дискретизації системи коливання розкладаються у ряд за власними формами лінійної задачі. Вільні коливання досліджуються за допомогою нелінійних нормальних форм Шоу – П'єра. В результаті аналізу отримано вплив депланації ПС на їх коливання. Урахування депланації ПС призводить до переважного внеску нелінійної інерційності в коливання стрижня, а навпаки, неврахування депланації, – до геометричної нелінійності.

У той же час отримана авторами [10] система рівнянь для алгоритмізації і рішення геометрично і фізично нелінійних задач є слабо пристосованою, за її допомогою можливо отримати рішення тільки для окремих випадків.

Авторами [10] виконано тільки спрощений аналіз отриманої системи рівнянь шляхом її дискретизації, де коливання розкладаються у ряд за власними формами лінійної задачі і тільки для окремого випадку.

Незважаючи на численні дослідження, проведені в області вивчення статички і динаміки ПС, неясними залишаються багато особливостей їх поведінки: проблеми в діагностиці цілісності паль (каверни, шийки, розширення і т.д.), петлеутворення в ПС при буксируванні в космосі, повітрі та водному середовищі, правильний вибір коефіцієнта динамічності при складних маневрах буксирувальника і т.д. Окремим питанням, що вимагає досліджень в області побудови алгоритмів розпаралелювання і паралельних обчислень, є врахування багатохвильового характеру розповсюдження збурень в ПС. Традиційні обчислення напружено-деформованого стану (НДС) ПС на основі спрощених математичних моделей часто призводять до «розхитування» обчислювальних алгоритмів і невірних висновків при інтерпретації отриманих чисельних даних, як показано в роботах Трофимчука О.М., Калікова В.М., Ордановича О.Є. та ін. У роботі Селезова І.Т. показано, що рівняння Тимошенка принципово відрізняється від класичного рівняння Бернуллі – Ейлера згинних коливань балки. Воно описує поширення збурень зі скінченною швидкістю, що встановлено із узагальненого рівняння 6-го порядку гіперболічного типу, яке як часткові випадки включає відомі рівняння, а також рівняння Тимошенка без коректуючого коефіцієнта зсуву. Селезовим І.Т. відмічається, що у подальшому було розроблено обчислювальні програми, але із порушеннями суцільності середовища, тобто спрощенням моделі [11].

Як об'єкти математичного моделювання ПС описуються системами квазілінійних рівнянь. Чисельне моделювання нелінійних систем в умовах сьогодення є окремим напрямком в математичній царині. Серед робіт, присвячених побудові складних математичних моделей процесів механіки деформованого середовища, гідродинаміки та фільтрації підземних вод, слід виділити праці Сергієнка І.В., Скопечького В.В., Трофимчука О.М., Губарева В.Ф., Калюха Ю.І. та ін. В розвиток нестационарних задач аерогідропружного НДС ПС, розробку рішення статичних, динамічних та оптимізаційних задач значний внесок здійснили Крилов О.М., Тимошенко С.П., Ішлінський А.Ю., Селезов І.Т., Кубенко В.Д., Горошко О.О., Каюк Я.Ф., Гузь О.М., Салтанов М.В., Горбань В.О., Орданович О.Є., Калюх Ю.І., Каліков В.М., Гуляєв В.І., Гайдачук В.В., Кошкін В.Л., Баженов В.О., Лізунов П.П., Попов Е.П., Ллюхін О.А., та ін. Вагомі результати в області вирішення прикладних задач статички, динаміки та оптимізації ПС отримані Ядикіним Ю.В., Безверхим А.І., Тихоновим В.С., Некрасовим І.В., Ремчуковим В.І., Поддубним В.І., Льїним Р.Ф. та ін. [12-20]. Серед зарубіжних вчених, які зробили значний внесок в аналіз статички і динаміки ПС в потоці, необхідно виділити Chapman В.А., Griffin О.М., Iwers W.B., Nair S., Wingham B.S. та ін.

Питанням удосконалення методів розрахунку та розробки програмних засобів для комп'ютерної реалізації розрахунків ПС у будівництві, впровадження заходів з проектування та влаштування протизсувних споруд з ПС у вигляді паль присвячено багато наукових робіт та досліджень, серед яких найбільш відомими є праці Трофимчука О.М., Калюха Ю.І., Бойка В.В., Герсенванова М.М., Гольдштейна М.М., Гінзбурга Л.К., Кільвандера Є.Я.,

Маслова М.М., Полевецького В.В., Сільченка К.В., Шахунянца Г.М., Чернія Г.І., Глуховського В.П., Яраса В.І., Улицького В.М., Джонса Р., Фекеоару І., Лещинського М.Ю., Єрмошкіна П.М., Ногіна С.І., Сафарова В.А., Судакова В.В., Почтовика Г.Я., Бамбури А.М., Городжи А.Д., Мар'єнкова М.Г., Немчинова Ю.І., Довженко О.О., Bishop A., Fellenius W., Fukoka H., Mongerstern N., Sassa K., Terzaghi K., Carino N.J., Sansalone M., Hsu N.N., Lin J.-M., Streett W., Liao S.T., Roesset J.M., Chen C.H., Yu C.P., Ambrosini D., Ezeberry J., Kim D.S., Kim H.W., Kim W.C., Seo W.S., Choi K.C., Wooa S.K. та ін. [12-20].

При спробі вдосконалення математичного моделювання розподілених ПС виникає низка складнощів, що обумовлені відсутністю ефективних програмних засобів комп'ютерного моделювання, недосконалістю та обмеженістю прикладних методик для розрахунку хвильового НДС ПС. Головними недоліками є відсутність та недостатня розробленість нелінійних хвильових динамічних математичних моделей ПС, досконалих методів їх чисельного моделювання, що є перепонами для створення на їх базі сучасних експериментальних автоматизованих комп'ютерних приладів неруйнівної діагностики безпосередньо в умовах будівельних майданчиків при зведенні будівель та споруд.

П'ятихвильова модель динаміки ПС. Розглянемо ПС у просторі з постійними характеристиками поперечного перерізу. Радіус-вектор початкового положення стрижня позначимо $\bar{R}_0(S, 0)$, а деформованого – $\bar{R}(S, t)$.

Введемо деформацію елемента ПС:

$$\varepsilon = \frac{(dS^2 - dS_0^2)}{dS_0^2} = \left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial S} \right|^2 - 1. \quad (1)$$

Тоді змінні S_0 і S , що характеризують недеформовану та розтягнуту довжину ПС, будуть пов'язані між собою співвідношенням:

$$dS = \sqrt{1 + \varepsilon} \cdot dS_0. \quad (2)$$

Введемо поперечну деформацію (депланация) елемента ПС, що описує рівномірне стиснення – розширення його поперечного перерізу.

Введемо природну систему координат з одиничними взаємоортогональними векторами \bar{i} , \bar{n} і \bar{b} . Вектор \bar{i} – одиничний вектор дотичної, визначається зі співвідношення:

$$\bar{i}(S, t) = \frac{\partial \bar{R}(S, t)}{\partial S}, \quad (3)$$

а два інших вектори – \bar{n} і \bar{b} – ортогональні до \bar{i} . Похідна радіус-вектора \bar{R} в деформованому стані має вигляд

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial S} = \bar{i}(1 + \varepsilon). \quad (4)$$

З іншого боку, для похідної від радіус-вектора $\bar{R}(S, t) - \partial\bar{R}/\partial t$ – маємо такий вираз:

$$\frac{\partial\bar{R}}{\partial t} = U_t \bar{t} + U_n \bar{n} + U_b \bar{b}. \quad (5)$$

Тут U_t, U_n і U_b – проекції відносної швидкості на поточні одиничні вектори \bar{t}, \bar{n} і \bar{b} .

Якщо долучити умови безперервності, існування похідних від радіус-вектора $\bar{R}(S, t)$ необхідного порядку та рівності змішаних похідних, то можемо отримати наступні вирази

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial U_t}{\partial S} - k_1 U_n - k_2 U_b; \quad -(1 + \varepsilon)\Omega_1 = \frac{\partial U_b}{\partial S} - k_2 U_t + k_3 U_n; \quad (1 + \varepsilon)\Omega_2 = \frac{\partial U_n}{\partial S} + k_1 U_t + k_3 U_b. \quad (6)$$

Повні похідні кривизни k_i за часом мають вигляд:

$$\frac{\partial k_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{n}}{\partial S} \bar{b} \right) = \frac{\partial b}{\partial t} \frac{\partial \bar{n}}{\partial S} + \bar{b} \left(\frac{\partial^2 \bar{n}}{\partial S \partial t} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\partial \bar{n}}{\partial S} \frac{1}{1 + \varepsilon} \right) \quad (7)$$

або:

$$\frac{\partial k_3}{\partial t} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial S} - k_1 \Omega_1 - k_2 \Omega_2 - \frac{k_3}{1 + \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \quad (8)$$

За аналогією для k_1 і k_2 :

$$\frac{\partial k_1}{\partial t} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial S} + k_2 \Omega_3 + k_3 \Omega_1 - \frac{k_1}{1 + \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad \frac{\partial k_2}{\partial t} = -\frac{\partial \Omega_1}{\partial S} + k_3 \Omega_2 + k_1 \Omega_3 - \frac{k_2}{1 + \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \quad (9)$$

Запишемо загальні теореми про збереження кількості руху і збереження моменту кількості руху для елемента ПС у векторній формі [21]:

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial S} + \bar{F}^{(E)} + \bar{F}^{(I)} + \bar{F}^{(M)} = 0; \quad \frac{\partial \bar{M}}{\partial S} + \bar{t} \times \bar{N} + \bar{M}^{(E)} + \bar{M}^{(I)} + \bar{M}^{(M)} = 0. \quad (10)$$

Або в скалярному вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial S} + k_1 N_3 - k_3 N_2 + \bar{F}^{(E)} \bar{n} + \bar{F}^{(I)} \bar{n} + \bar{F}^{(M)} \bar{n} &= 0, \\ \frac{\partial N_2}{\partial S} + k_3 N_1 + k_2 N_3 + \bar{F}^{(E)} \bar{b} + \bar{F}^{(I)} \bar{b} + \bar{F}^{(M)} \bar{b} &= 0, \\ \frac{\partial N_3}{\partial S} - k_1 N_1 - k_2 N_2 + \bar{F}^{(E)} \bar{t} + \bar{F}^{(I)} \bar{t} + \bar{F}^{(M)} \bar{t} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Із закону Гука для осьового зусилля для елемента ПС випливає:

$$N_3 = E F \varepsilon. \quad (12)$$

Тут E – модуль Юнга матеріалу ПС, F – площа поперечного перерізу ПС до деформації, ε – відносна поздовжня деформація ПС.

Запишемо умови збереження моменту кількості руху в проєкціях на одиничні взаємоортогональні вектори \bar{t} , \bar{n} і \bar{b} прийнятої системи координат [13, 15]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_2}{\partial S} + k_3 M_1 - k_3 M_3 + N_1 + \bar{m}^{(E)} \bar{b} + \bar{m}^{(I)} \bar{b} + \bar{m}^{(M)} \bar{b} &= 0; \\ \frac{\partial M_1}{\partial S} + k_1 M_3 - k_3 M_2 - N_2 + \bar{m}^{(E)} \bar{n} + \bar{m}^{(I)} \bar{n} + \bar{m}^{(M)} \bar{n} &= 0; \\ \frac{\partial M_3}{\partial S} + k_1 M_1 - k_2 M_2 + \bar{m}^{(E)} \bar{t} + \bar{m}^{(I)} \bar{t} + \bar{m}^{(M)} \bar{t} &= 0; \end{aligned} \quad (13)$$

Для згинальних моментів M_1 , M_2 , а також M_3 приймемо співвідношення:

$$\begin{aligned} M_1 &= -EI_{22}k_2; \\ M_2 &= EI_{11}k_1; \\ M_3 &= GJk; \quad k = k_3 - \eta_3. \end{aligned} \quad (14)$$

Тут I_{22} , I_{11} , J – моменти інерції, а η_3 – кут закручування одиниці довжини ПС.

Отримана система рівнянь (11)–(14) описує фізично та геометрично нелінійну просторову модель динаміки ПС. Однак вона є параболічно-гіперболічною, так як не враховано інерцію повороту поперечного перерізу ПС. Модель (11)–(14) описує тільки чотири хвилі в ПС з шести (поздовжні, крутильні, згинальні (дві)), а конфігураційні (поперечні) хвилі не описує [21].

Для усунення цього недоліку гіперболізуємо модель (11)–(14) шляхом введення кутів α і β . Вони будуть характеризувати поворот поперечних перерізів ПС, тобто деформацію зсуву в усередненому сенсі. Поперечні перерізи, плоскі до деформації, залишаються такими ж плоскими і після деформації, але, можливо, повернутими. Причому не обов'язково перпендикулярними до серединної осі ПС. Матеріалізація цієї гіпотези для перерізуючих сил N_1 і N_2 набуває такого вигляду

$$N_1 = \alpha l_1 GF_s; \quad N_2 = \beta l_2 GF_s. \quad (15)$$

Тут l_1 , l_2 – коефіцієнти, що враховують вплив зсуву, F_s – площа поперечного перерізу ПС.

У першому наближенні, під депланацією поперечного перерізу ПС будемо розуміти його рівномірне стиснення або розтягнення – змінна $z(t, S)$. Врахування депланації поперечного перерізу $z(t, S)$ при зсуві і крученні ПС зробимо на основі узагальненого хвильового рівняння, коефіцієнти якого залежать від t , S й інших невідомих U_t, U_n, U_b і $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.

$$f_1 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + f_2 \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial S} + f_3 \frac{\partial^2 z}{\partial S^2} + f_4 \frac{\partial z}{\partial t} + f_5 \frac{\partial z}{\partial S} = P_{13}. \quad (16)$$

Модель (11)–(14) з додатковою умовою (15) та гіперболічним рівнянням другого порядку (16), що описує хвильову депланацію поперечного перерізу ПС, можна шляхом нескладних тотожних перетворень записати:

$$\text{а) } \begin{cases} a_{11} \frac{\partial k_1}{\partial S} + a_{12} \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} + a_{13} \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} = P_1; \\ a_{21} \frac{\partial k_2}{\partial S} + a_{22} \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} + a_{23} \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} = P_2; \\ a_{31} \frac{\partial k_3}{\partial S} + a_{32} \frac{\partial \Omega_3}{\partial t} = P_3; \end{cases} \quad (17)$$

$$\text{б) } \begin{cases} a_{41} \frac{\partial k_1}{\partial t} + a_{42} \frac{\partial \Omega_2}{\partial S} = P_4; \\ a_{51} \frac{\partial k_2}{\partial t} + a_{52} \frac{\partial \Omega_1}{\partial S} = P_5; \\ a_{61} \frac{\partial k_3}{\partial t} + a_{62} \frac{\partial \Omega_3}{\partial S} = P_6; \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{в) } \begin{cases} a_{71} \frac{\partial \alpha}{\partial S} + a_{72} \frac{\partial U_n}{\partial t} + a_{73} \frac{\partial N_3}{\partial t} = P_7; \\ a_{81} \frac{\partial \beta}{\partial S} + a_{82} \frac{\partial U_b}{\partial t} + a_{83} \frac{\partial N_3}{\partial t} = P_8; \\ a_{91} \frac{\partial N_3}{\partial S} + a_{92} \frac{\partial U_t}{\partial t} + a_{93} \frac{\partial N_3}{\partial t} = P_9; \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{г) } \begin{cases} a_{101} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + a_{102} \frac{\partial U_n}{\partial S} = P_{10}; \\ a_{111} \frac{\partial \beta}{\partial t} + a_{112} \frac{\partial U_b}{\partial S} = P_{11}; \\ a_{121} \frac{\partial N_3}{\partial t} + a_{122} \frac{\partial U_t}{\partial S} = P_{12}. \end{cases} \quad (20)$$

$$\text{д) } f_1 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + f_2 \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial S} + f_3 \frac{\partial^2 z}{\partial S^2} + f_4 \frac{\partial z}{\partial t} + f_5 \frac{\partial z}{\partial S} = P_{13}. \quad (21)$$

Система (17)–(21) являє собою систему квазілінійних гіперболічних рівнянь, що описує сім мод коливань ПС п'яти типів: поздовжні, крутильні, дві конфігураційні (поперечні) та дві згинальні, а також депланаційні.

Перші три рівняння (17) описують закон збереження моменту руху елементом ПС, друга група рівнянь (18) – динамічний зв'язок між нестационарними похідними від кривизни k_i і конвективними похідними від кутових швидкостей Ω_i . Разом система (17)–(18) описує три моди коливань – згинальні у двох взаємоортогональних площинах (\bar{n}, \bar{t}) і (\bar{b}, \bar{t}) , а також крутильну.

Перші три рівняння (19) виражають динамічний закон збереження кількості руху елементом ПС, останні три рівняння (20) – умову «нерозривності» ПС:

$$\frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial t \partial S} = \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial S \partial t}.$$

Разом рівняння (19)–(20) описують три моди коливань: конфігураційні (поперечні) в двох взаємоортогональних площинах (\bar{n}, \bar{t}) і (\bar{b}, \bar{t}) , а також поздовжню.

Останнє рівняння (21) описує хвильову депланаційну зміну поперечного перерізу ПС в наближеному вигляді (у вигляді нестационарного рівномірного звуження або розширення поперечного перерізу ПС при проходженні через нього хвиль різних типів). Передбачається, що коефіцієнти в (21) при похідних $f_i, i = 1, 5$ та права частина P_{13} залежать від вектора-стовпця невідомих W , компонент розподілених масових і поверхневих сил, що діють на ПС в потоці рідини (або газу).

У підсумку система рівнянь (17)–(21) може бути записана у вигляді одного матричного рівняння типу переносу в стандартній формі [13, 15]:

$$E \frac{\partial W}{\partial t} + B \frac{\partial W}{\partial S} = P. \quad (22)$$

Тут E – одинична матриця розмірності 14x14, B – матриця конвективних членів 14x14. Вектор-стовпець правих частин P визначається розподіленими масовими та поверхневими силами, а також моментами цих сил. Вектор-стовпець P залежить від часу t , лагранжевої координати S , вектора-стовпця невідомих W , компонент розподілених масових і поверхневих сил.

Крайові та початкові умови для моделі (22). У верхній частині ПС (при $S = L$) можуть бути задані проекції швидкості \bar{U} :

$$\begin{aligned} U_i(L, t) &= U_i^*(t) \\ U_n(L, t) &= U_n^*(t) \\ U_b(L, t) &= U_b^*(t) \end{aligned} \quad (23)$$

На нижньому кінці ПС (при $S = 0$) можуть бути задані умови динамічної рівноваги сил \bar{F}_i і моментів \bar{M}_j на кінці ПС (наприклад, на транспортованому вантажеві (приладі) рис. 2–4):

$$\sum_{i=1}^3 \bar{F}_i = 0; \quad \sum_{j=1}^3 \bar{M}_j = 0. \quad (24)$$

В якості вихідних умов використовується рішення задачі статики на основі моделі (22) при $\frac{\partial}{\partial t}(\dots) = 0$ [13]. Модель (22) з початковими та крайовими умовами (23)–(24) являє собою замкнуту систему квазілінійних рівнянь в часткових похідних, а також початково-крайову задачу.

Case Study моделі (22)–(24). Еволюція геометричних характеристик буксированої системи при маневрі судна-буксирувальника. Розглянемо на конкретному прикладі еволюцію основних силових і геометричних характеристик буксированої ПС при маневрі, що найбільш часто зустрічається на практиці [15]:

1. обхід буксированим апаратом перешкоди на дні;
2. маневр зондування у вертикальній площині безпілотним підводним апаратом (БПА) з метою пошуку донних мін та інших малорозмірних об'єктів, розміщених безпосередньо на морському дні (кабелі зв'язку, нафто- і газопроводи та ін.).

Розглянемо маневр судна-буксирувальника з ПС та БПА, що швидко відбувається та здійснюється при постійній швидкості буксирування 7.5 м/с шляхом зміни довжини витравленої частини ПС. Первісна довжина системи становила 120 м, найбільша довжина під час еволюції була 175 м, час змотування змінювався в діапазоні $[0 \div 20 \text{ с}]$ в залежності від тахограми лебідки. Силкові та гідродинамічні характеристики ПС були наступними: погонна маса і приєднана маса до деформування ПС – 2.5 та 0.8 кг/м, початковий діаметр канату – 0.03 м, первісна плавучість одиниці довжини канату – 17.6 Н/м, ефективна розтяжність канату змінювалася в діапазоні $[3 \times 10^{-6} \div 3 \times 10^{-8}]$, маса БПА – 250 кг (приєднана маса БПА – 50 кг), площа міделевого перетину БПА – 0.4 м², гідродинамічний коефіцієнт опору БПА дорівнював 0.5, гідродинамічні коефіцієнти опору форми і тертя ПС були, відповідно, 0.05 і 0.01, дискретність по довжині ПС змінювалася в діапазоні $[1 \div 20 \text{ м}]$, коефіцієнти C_1 і C_2 дорівнювали $C_1 = 0$, $C_2 = 5$, крок за часом вибирався з умови стійкості рахунку [15].

Чисельні результати були отримані для тахограми, в якій чергувалися два режими: витравлювання – підйом із зупинкою лебідки (рис. 6).

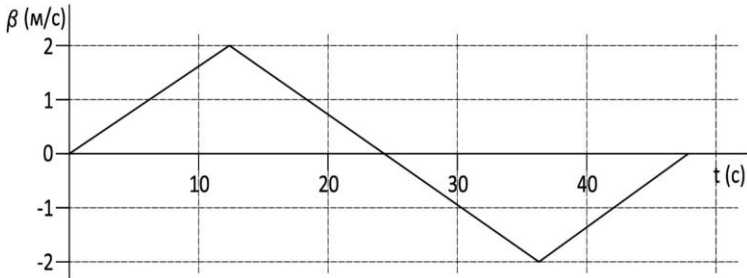


Рис. 6 – Тахограма режиму роботи лебідки

Еволюційні криві всієї конфігурації ПС для даної тахограми лебідки при швидкості буксирування 4 м/с в різні моменти часу зображені на рис. 7–8.

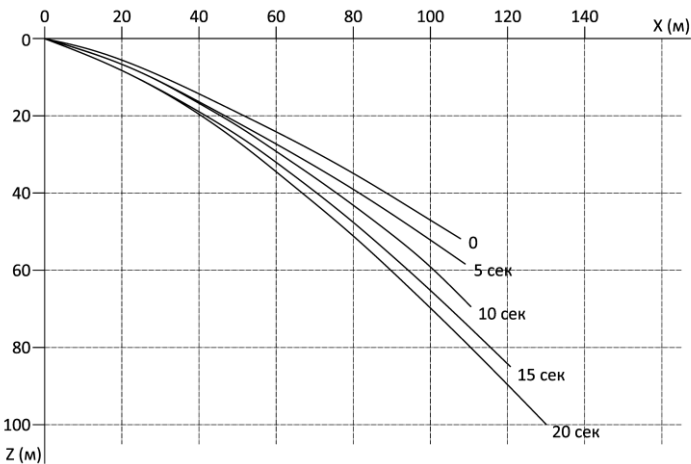


Рис. 7 – Еволюція конфігурації ПС. Час 0-20 с

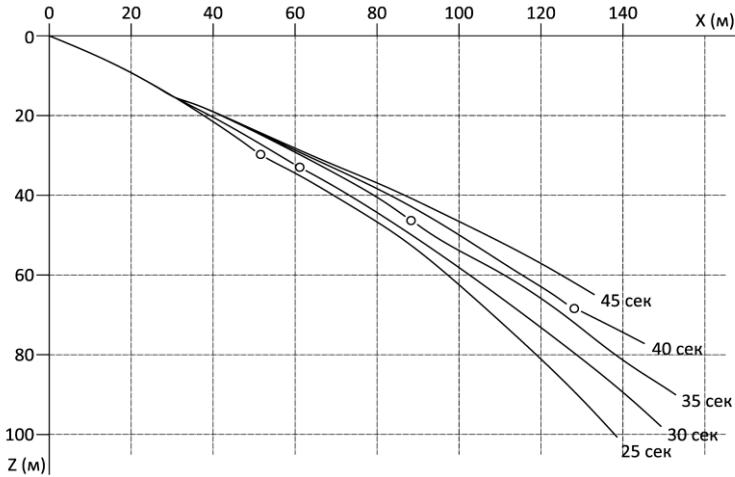


Рис. 8 – Еволюція конфігурації ПС. Час 25-45 с

Для зазначеного режиму тахограми в ПС під час перехідного процесу нелінійно взаємодіють три фізичні процеси, що протікають одночасно, – поздовжні хвилі, поперечні хвилі і ефекти, що зумовлені зміною довжини ПС. Характеристикою першого з процесів є криві еволюції осьового зусилля і проекції дотичної складової відносної швидкості обтікання канату в потоці. Умовно еволюційну залежність натягу в корінній точці ПС можна розбити на 4 етапи. На першому етапі, під час рівноприскореного змотування ПС із судової лебідки, при збільшенні швидкості змотування осьове зусилля в ПС зменшується. Одночасно з цим збільшується довжина витравленої її частини, збільшується гідродинамічний опір, ПС спочатку «запізнюється», а потім підтягується і рухається з постійною швидкістю судном-буксирвальником. Це призводить до ривка в ПС і, як наслідок, до різкого збільшення осьового зусилля на другій ділянці тахограми.

На третій ділянці тахограми швидкість змотування рівномірно зменшується і змотування ПС переходить до вибірки канату (намотування на лебідку). Тут осьове зусилля спочатку плавно, а потім більш різко зростає, перевищуючи початкове квазістатичне значення в 3.5–4 рази. Причому, чим вище ефективний модуль Юнга матеріалу канату, тим вище динамічний ривок в протяжній системі. При уповільненні вибірки канату і повній зупинці лебідки силова картина черговий раз змінюється: осьове зусилля зменшується і поступово виходить на нове стаціонарне значення, відповідне новій довжині ПС в 140 м.

Процеси, які характеризуються поперечними хвилями, є більш згладженими. На кривій еволюції кута відхилення корінної точки від вертикалі можна виділити три характерних ділянки відповідно до зміни швидкості змотування. Однак, повної кореляції залежності немає, це обумовлено запізненням в системі через нелінійну взаємодію перерахованих вище трьох процесів і сил гідродинамічного демпфірування.

Висновки

1. Незважаючи на численні дослідження, проведені в області вивчення статички і динаміки ПС, неясними залишаються багато особливостей їх поведінки:

проблеми в діагностиці цілісності паль (каверни, шийки, розширення і т.д.), петлеутворення в ПС при буксируванні в космосі, повітрі та водному середовищі, правильний вибір коефіцієнта динамічності при складних маневрах буксирувальника і т.д. Окремим питанням, що вимагає досліджень в області побудови алгоритмів розпаралелювання і паралельних обчислень, є врахування багатохвильового характеру розповсюдження збурень в ПС.

2. Отримано п'ятимодову математичну модель, що описує нелінійну динаміку ПС в просторово-неоднорідному полі масових і поверхневих сил. Для неї виконуються принципи граничності і гіперболічності, що сформульовані І.Т. Селезовим в роботі [11]. У сукупності з крайовими і початковими умовами вона може застосовуватися для управління ПС; опису динаміки і статички геометрично і фізично нелінійних космічних зв'язок; стрижневих елементів (лопатеї гвинтокрилів, лопаток турбин та ін.); ерліфтних систем великої протяжності для видобутку корисних копалин з дна Світового океану; паль в ґрунті; канатів кранового обладнання; шахтних підйомників, підвісних канатних доріг; ПС, що буксируються в потоці рідини та газу; підводних електричних кабелів від морських вітроенергетичних установок та підводних кабелів зв'язку; ін.

3. Осьові сили є однією з основних причин пошкодження ПС (підводних кабелів), які складаються зі спіральної броні, оболонки, ізоляції та проводів. На додаток до осьового подовження, коли кабель піддається розтягуючим навантаженням, спіральна броня також створює крутний момент. У глибоководних умовах вплив тиску води на жорсткість кабелю є важливим. В минулому такі дослідження проводилися рідко [2]. Коли кабель розташований на 4000 м нижче рівня моря, пов'язані розтягуючі, скручуючі і стискаючі навантаження можуть знизити жорсткість на розтяг ПС в цілому до 30%. Таким чином, при аналізі і проектуванні ПС (підводних кабелів) необхідно ретельно враховувати пов'язані ефекти навантажень розтягування, скручування і стискання [2].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. AN/ALE-50 Towed Decoy System. Електронний ресурс. Режим доступу: <https://www.raytheon.com/capabilities/products/ale50>
2. Mechanical behavior of submarine cable under coupled tension, torsion and compressive loads. Режим доступу: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0029801819304470>
3. Combination of Acoustics with High Resolution Oceanography. Електронний ресурс. Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/228540255_Combination_of_Acoustics_with_High_Resolution_Oceanography/figures?lo=1
4. Электродинамические связи – "ЭДС". Електронний ресурс. Режим доступу: <http://galspace.spb.ru/index116.html>
5. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1959. – 450 с.
6. Воробьев Ю.С., Шорр Б.Ф. Теория закрученных стержней. – Киев: Наук. думка, 1983. – 188 с.
7. Воробьев Ю.С. Уточнение уравнений свободных колебаний вращающихся стержней // Рабочие процессы в турбомашинах и прочность их элементов. – Киев: Наук. думка, 1965. – С. 11–27.
8. Hodges D.H. and Dowell E.H. Nonlinear Equations of Motions for the Elastic Bending and Torsion of Twisted Nonuniform Rotor Blades. – NASA TND-7818, 1974. – 52 p.

9. Crespo da Silva M.R.M. and Glynn C.C. Nonlinear flexural-flexural torsional dynamics of in extensional beams. I: Equations of motion // J. Struct. Mech. – 1978. – No. 6. – P. 437–448.
10. Аврамов К.В., Галас О.С., Морачковский О.К., Пьер К. Анализ нелинейных изгибно-изгибно-крутильных колебаний вращающихся закрученных стержней с учетом деформации поперечного сечения // Проблемы прочности, 2009, № 2 – С. 112–124.
11. Selezov, I.T. Development and Application of the Cauchy–Poisson Method to Layer Elastodynamics and the Timoshenko Equation. *Cybern Syst Anal* 54, 434–442 (2018). DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0044-x>
12. Kaliukh, I., Farenjuk, G., Trofymchuk, O., Farenjuk, I., Berchun, Y. (2019). Identification of defects in reinforced concrete piles based on multi-wave reflection. In: Derkowski W., Gwozdziejewicz P., Hojdis L., Krajewski P. (eds). *Proc. fib Symp. 2019: Concrete – Innovations in Materials, Design and Structures*, Fédération Internationale du Béton (fib) – International Federation for Structural Concrete. – P. 991-998. URL <http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-85066103818&partnerID=MN8TOARS>
13. Kaliukh, I., Trofymchuk, O. & Lebid, O. Numerical Solution of Two-Point Static Problems for Distributed Extended Systems by Means of the Nelder–Mead Method. *Cybern Syst Anal* 55, 616–624 (2019). DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00170-3>
14. Trofymchuk, O., Lebid, O., Klymenkov, O., Berchun, Y., Berchun, V., Kaliukh, I., Marjenkov, M., Shekhunova, S., Havriliuk, R. [2019] Dynamic certification of landslide protection structures in a seismically hazardous region of Ukraine: experimental and analytical research. *Earthquake geotechnical engineering for protection and development of environment and constructions*. In: Silvestri F., Moraci N. (eds.). *Proc. of the VII ICEGE 7th International Conference on Earthquake Geotechnical Engineering*, Rome, Italy, 17-20 June 2019, 5337-5344.
15. Lebid A.G. (2020) Control and Dynamics of a Distributed System with Variable Length *Journal of Automation and Information Sciences*, 52(9), 39-50. DOI: [10.1615/JAutomatInfScien.v52.i9.40](https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v52.i9.40)
16. Trofymchuk, O., Kaliukh, I., & Klymenkov, O. (2018). TXT-tool 2.380-1.1. Monitoring and Early Warning System of the Building Constructions of the Livadia Palace, Ukraine. In: Sassa K. et al. (eds.) *Landslide Dynamics: ISDR-ICL Landslide Interactive Teaching Tools* (pp. 491-508). Cham: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-57774-6_37
17. Трофимчук А.Н., Черний В.Г., Черний Г.И. (2006). Надежность систем сооружения – грунтовое основание в сложных инженерно-геологических условиях. – Київ. Полграф консалтинг. – 247 с.
18. Gorban I.M., Lebid O.G. (2019) Numerical Modeling of the Wing Aerodynamics at Angle-of-Attack at Low Reynolds Numbers. In: Sadovnichiy V., Zgurovsky M. (eds) *Modern Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-96755-4_10
19. Grebenikov, V., Kajan, V., Lebid, O., Pryjmak, M. (2015) Wind power unit the new type wind turbin and electric generator // *International Journal of Scientific Engineering and Applied Science (IJSEAS)* – Volume-1, Issue-7, October 2015:407-413.
20. Kayan, V.P., Kochin, V.A., Lebid, O.G. (2009) Studying the performance of Vertical Axis Wind Turbine (VAWT) models with blade control mechanism // *International Journal of Fluid Mechanics Research*, 2009, 36(2), pp. 154–165.
21. Hegemier G.A., Nair S. A nonlinear dynamical theory for heterogeneous, anisotropic, elastic rods // *AIAA*. – 1977. – 15, № 1. – P. 8–15.

Стаття надійшла до редакції 19.02.2021 і прийнята до друку після рецензування 17.05.2021

REFERENCES

1. AN/ALE-50 Towed Decoy System. Retrieved 12.02.2021 from: <https://www.raytheon.com/capabilities/products/ale50>
2. Mechanical behavior of submarine cable under coupled tension, torsion and compressive loads. Retrieved 12.02.2021 from: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0029801819304470>
3. Combination of Acoustics with High Resolution Oceanography. Retrieved 12.02.2021 from: https://www.researchgate.net/publication/228540255_Combination_of_Acoustics_with_High_Resolution_Oceanography/figures?lo=1
4. Jelektrodinamicheskie svjazki [Electrodynamic connections]. Retrieved 12.02.2021 from: <http://galspace.spb.ru/index116.html>
5. Timoshenko, S.P. (1959). *Kolebanija v inzhenernom dele* [Fluctuations in engineering]. Moscow: Fizmatgiz (in Russian).
6. Vorob'ev, Ju.S., & Shorr, B.F. (1983). *Teorija zakruchennyh sterzhnej* [Theory twisted bars]. Kyiv: Nauk. Dumka (in Russian).
7. Vorob'ev, Ju.S. (1965). Utochnenie uravnenij svobodnyh kolebanij vrashhajushhihsja sterzhnej [Refinement of the equations of free vibrations of rotating rods]. In *Rabochie processy v turbomashinah i prochnost' ih jelementov*, (pp. 11–27). Kyiv: Nauk. Dumka (in Russian).
8. Hodges, D.H., & Dowell, E.H. (1974). Nonlinear Equations of Motions for the Elastic Bending and Torsion of Twisted Nonuniform Rotor Blades. NASA TND-7818.
9. Crespoda Silva, M.R.M., & Glynn, C.C. (1978). Nonlinear flexural-flexural torsional dynamics of in extensional beams. I: Equations of motion. *J. Struct. Mech*, 6, 437-448.
10. Avramov, K.V., Galas, O.S., Morachkovskij, O.K., & P'er, K. (2009). Analiz nelinejnyh izgibno-izgibno-krutil'nyh kolebanij vrashhajushhihsja zakruchennyh sterzhnej s uchedom deplanacii poperechnogo sechenija [Analysis of nonlinear flexural-flexural-torsional vibrations of rotating twisted rods taking into account the deplanation of the cross-section]. *Problemy prochnosti*, 2, 112-124 (in Russian).
11. Selezov, I.T. (2018). Development and Application of the Cauchy–Poisson Method to Layer Elastodynamics and the Timoshenko Equation. *Cybern Syst Anal*, 54, 434-442. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0044-x>
12. Kaliukh, I., Farenjuk, G., Trofymchuk, O., Farenjuk, I., & Berchun, Y. (2019). Identification of defects in reinforced concrete piles based on multi-wave reflection. In: Derkowski W., Gwoździewicz P., Hojdyś Ł., Krajewski P. (eds). *Proc. fib Symp. 2019: Concrete – Innovations in Materials, Design and Structures*, Fédération Internationale du Béton (FIB) – International Federation for Structural Concrete, (pp. 991-998). URL <http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-85066103818&partnerID=MN8TOARS>
13. Kaliukh, I., Trofymchuk, O. & Lebid, O. Numerical Solution of Two-Point Static Problems for Distributed Extended Systems by Means of the Nelder–Mead Method. *Cybern Syst Anal*, 55, 616-624. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00170-3>
14. Trofymchuk, O., Lebid, O., Klymenkov, O., Berchun, Y., Berchun, V., Kaliukh, I., et al. (2019). Dynamic certification of landslide protection structures in a seismically hazardous region of Ukraine: experimental and analytical research. Earthquake geotechnical engineering for protection and development of environment and constructions. In: Silvestri F., Moraci N. (eds.). *Proc. of the VII ICEGE 7th International Conference on Earthquake Geotechnical Engineering*, Rome, Italy, 17-20 June 2019, 5337-5344.
15. Lebid, A.G. (2020). Control and Dynamics of a Distributed System with Variable Length. *Journal of Automation and Information Sciences*, 52 (9), 39-50. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v52.i9.40
16. Trofymchuk, O., Kaliukh, I., & Klymenkov, O. (2018). TXT-tool 2.380-1.1. Monitoring and Early Warning System of the Building Constructions of the Livadia Palace, Ukraine. In: Sassa K. et al. (eds.) *Landslide Dynamics: ISDR-ICL Landslide Interactive Teaching Tools* (pp. 491-508). Cham: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-57774-6_37

17. Trofimchuk, A.N., Chernij, V.G., & Chernij, G.I. (2006). *Nadezhnost' sistem sooruzhenie – gruntovoe osnovanie v slozhnyh inzhenerno-geologicheskikh usloviyah* [Reliability of systems construction – soil foundation in difficult engineering and geological conditions]. Kyiv: Polgraf konsalting (in Russian).
18. Gorban I.M., & Lebid O.G. (2019). Numerical Modeling of the Wing Aerodynamics at Angle-of-Attack at Low Reynolds Numbers. In: Sadovnichiy V., Zgurovsky M. (eds) *Modern Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-96755-4_10
19. Grebenikov, V., Kajan, V., Lebid, O., & Pryjmak, M. (2015). Wind power unit the new type wind turbin and electric generator. *International Journal of Scientific Engineering and Applied Science (IJSEAS)*, 1 (7), 407-413.
20. Kayan, V.P., Kochin, V.A., & Lebid, O.G. (2009). Studying the performance of Vertical Axis Wind Turbine (VAWT) models with blade control mechanism. *International Journal of Fluid Mechanics Research*, 36 (2), 154-165.
21. Hegemier, G.A., & Nair, S. (1977). A nonlinear dynamical theory for heterogeneous, anisotropic, elastic rods. *AIAA*, 15 (1), 8-15.

The article was received 19.02.2021 and was accepted after revision 17.05.2021

Лебідь Олексій Григорович

кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, заступник директора Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАНУ

Адреса робоча: 03186 Україна, м. Київ, Чоколівський бульвар, 13

ORCID ID: 0000-0002-4003-8068, **e-mail:** o.g.lebid@gmail.com