

УДК 004.942; 519.168; 519.854.3

**Volodymyr Vasyanin**, D. S. (Computer science), Head of department  
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-4046-5243> **e-mail:** archukr@meta.ua

**Oleksandr Trofymchuk**, Corresponding Member of the NAS of Ukraine, D. S. (Computer science), professor, Director  
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-3358-6274> **e-mail:** itgis@nas.gov.ua

**Liudmyla Ushakova**, Leading engineer  
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-9020-1329> **e-mail:** archukr@i.ua

Institute of Telecommunications and Global Information Space of NASU, Kyiv, Ukraine

## RESEARCH OF THE OPTIMIZATION PROBLEM OF STRUCTURE HIERARCHICAL COMMUNICATION NETWORK WITH CHANGING ITS PARAMETERS

**Abstract.** *The article is devoted to the study of the problem of optimizing the hierarchical structure of a multicommodity communication network with discrete flows when changing its important parameters, such as the capacity of network arcs in transport blocks and the size of the transport block for transportation of the discrete small-lot cargo or of the data transmission in a digital communication network. The network has three levels of hierarchy – a backbone, a zonal and an internal and four types of nodes - backbone nodes of the first, second and third types, forming the backbone and zonal levels of the network, and nodes of the fourth type, which subordinate to each backbone node and forming the internal levels of the network. Types of nodes differ from each other in terms of functionality. The main task of the study is to establish how the structure of the backbone network changes (the number and location of backbone nodes of the first, second, and third types), the flow processing and distribution scheme, and the technical and economic indicators of the network's functioning for different values of its parameters. The principles of organization of sorting and distribution of flows in a three-level network and its mathematical model are given. A mathematical model of the optimization problem of the backbone network structure and flow sorting and distribution scheme is formulated. Algorithms for solving the problem are based on the discrete analogue of the local descent method proposed by the authors earlier, when the neighborhoods of the metric space of possible solutions are chosen based on heuristic considerations, taking into account the specifics of the problem being solved. Computer modeling of the problem on a network containing 10 nodes at the specified change in the both parameters is carried out. The modeling was carried out on the example of the transport network of cargo transportation using a computer program that is part of the instrumental software of the Information and Analytical Decision Support System (IA DSS), which is being developed at the Institute of Telecommunications and Global Information Space of the National Academy of Sciences of Ukraine. An experimental study of solution the problem showed that the structure of the network is weakly dependent on the change in the carrying capacity of the arcs and the size of the transport block. The proposed computer technology for solving problem when the network parameters are changed allows you to interactively modeling various options of a network, changing the topology, hierarchical structure, flows, parameters and constraints of the model and from the set of the obtained solutions to choose a best option, taking into account the selected a goal function and the accepted constraints; calculate preliminary*

*technical and economic indicators of the network's functioning, estimate the cost of additional resources and plan the amount of investment required for the modernization and construction of its structural elements, which ultimately makes it possible to increase the efficiency functioning of the network by optimizing use of its resources and reducing the operating costs for the processing and transportation of flows.*

**Keywords:** *hierarchical communication networks; discrete flows and parameters; optimization problems; computer modeling.*

**В.О. Васянін, О.М. Трофимчук, Л.П. Ушакова**

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, м. Київ, Україна

## **ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ СТРУКТУРИ ІЄРАРХІЧНОЇ КОМУНІКАЦІЙНОЇ МЕРЕЖІ ПРИ ЗМІНІ ЇЇ ПАРАМЕТРІВ**

**Анотація.** *Стаття присвячена дослідженню задачі оптимізації ієрархічної структури багатопродуктової комунікаційної мережі з дискретними потоками при зміні її важливих параметрів, таких як пропускна спроможність дуг мережі у транспортних блоках та розмір транспортного блоку для перевезення дискретних вантажів або передачі даних у мережі цифрового зв'язку. У мережі виділено три рівні ієрархії – магістральний, зональний і внутрішній і чотири типи вузлів – магістральні вузли першого, другого і третього типу, що утворюють магістральний і зональний рівні мережі, і вузли четвертого типу, які підлегли кожному магістральному вузлу і утворюють внутрішні рівні мережі. Типи вузлів відрізняються один від одного функціональними можливостями. Основним завданням дослідження є встановити, як змінюється структура магістральної мережі (кількість і розташування магістральних вузлів першого, другого і третього типу), схема обробки і розподілу потоків і техніко-економічні показники функціонування мережі для різних значень її параметрів. Наведено принципи організації сортування і розподілу потоків в трирівневій мережі і її математична модель. Сформульовано математичну модель задачі оптимізації структури магістральної мережі і схеми сортування і розподілу потоків. Алгоритми розв'язання задачі засновані на запропонованому раніше авторами дискретному аналогу методу локального спуску, коли околиці метричного простору можливих розв'язків вибираються з евристичних міркувань з урахуванням особливостей розв'язуваної задачі. Проведено комп'ютерне моделювання задачі на мережі, що містить 10 вузлів при заданій зміні обох параметрів. Моделювання проводилося на прикладі транспортної мережі перевезення вантажів за допомогою комп'ютерної програми, яка є частиною інструментальних програмних засобів інформаційно-аналітичної системи підтримки прийняття рішень (ІАС ППР), що розробляється в Інституті телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України. Експериментальне дослідження розв'язання задачі показало, що структура мережі слабо залежить від зміни пропускної спроможності її дуг і розміру транспортного блоку. Запропонована комп'ютерна технологія розв'язання задачі при зміні параметрів мережі дозволяє проєктувальнику в інтерактивному режимі моделювати її різні варіанти, змінюючи топологію, ієрархічну структуру, потоки, параметри і обмеження моделі, і з множини отриманих розв'язків вибирати найкращий варіант з урахуванням обраної функції мети і прийнятих обмежень; розраховувати*

*попередні техніко-економічні показники функціонування мережі, оцінювати вартість додаткових ресурсів і планувати величину потрібних інвестицій на модернізацію та будівництво її структурних елементів, що в кінцевому підсумку дає можливість підвищити ефективність функціонування мережі за рахунок оптимізації використання її ресурсів і зниження експлуатаційних витрат на обробку і транспортування потоків.*

**Ключові слова:** ієрархічні комунікаційні мережі; дискретні потоки і параметри; задачі оптимізації; комп'ютерне моделювання.

<https://doi.org/10.32347/2411-4049.2024.1.99-125>

## Вступ

Одними з пріоритетних галузей економіки України визначено транспорт та зв'язок, підвищення ефективності функціонування яких потребує створення комплексу автоматизованих систем обробки даних та управління різного рівня та призначення, взаємопов'язаних на засадах технологічної, організаційної, документаційної, програмної та інформаційної сумісності та утворюючих цілісну інформаційну інфраструктуру комунікаційних мереж. Тому оптимізація структури державних та корпоративних комунікаційних мереж та автоматизація процесів керування транспортними потоками в них є актуальними та перспективними напрямками у досягненні якісно нового рівня розвитку галузей транспорту та зв'язку, інтенсифікації ринкових перетворень в Україні та її інтеграції до Європейського Співтовариства.

В даний час більшість існуючих комунікаційних мереж (таких як транспортні мережі – ТМ, мережі передачі даних – МПД) мають ієрархічну структуру і складну систему управління обробкою та розподілом потоків, що циркулюють в них. Насамперед це обумовлено їх масштабністю, різноманітністю та складністю виконуваних функцій, функціонуванням в умовах неповної інформації та впливу випадкових факторів. Кількість рівнів ієрархії мережі може визначатися адміністративним розподілом території, структурою органів територіального управління, прийнятою технологією обробки та розподілу потоків вантажів, інформації та ін. Як правило, такі мережі складаються з децентралізованої розподіленої магістральної мережі та низових мереж – зональних та внутрішніх. Проектування ієрархічної структури мережі у більшості практичних випадків має спадний характер. На верхньому рівні вирішуються завдання структурного синтезу та перспективного розвитку мережі, для яких використовуються більш агреговані моделі розподілу потоків та розрахунку експлуатаційних та техніко-економічних показників її функціонування. На нижчих рівнях проектування деталізація об'єктів має збільшуватися з метою найбільш адекватного їх опису та прийняття раціональних рішень. Це зумовлює ітераційно-циклічний характер процесів проектування та управління, що включають процедури синтезу та аналізу можливих рішень на всіх рівнях мережі. Оскільки рішення приймаються за умов невизначеності, пов'язаних з неповнотою наявної інформації, і також з огрубленням математичних моделей, необхідно розділяти рішення на перспективні, поточні (тактичні) і оперативні.

Як відомо, більшість математичних моделей управління, що характеризують складну систему як єдине ціле, не є адекватними реальним процесам через труднощі формального опису багатьох обмежень. Для ієрархічних мереж неадекватність загальних моделей пояснюється також

неможливістю оперативного коригування моделей в умовах перебігу процесу, що змінюються, а також необґрунтованістю вибору критеріїв або заміною низки критеріїв одним, що має складний умовно-економічний характер. Спроби подати модель на рівні агрегованих показників ведуть до втрати специфіки організації обробки та розподілу потоків і, як правило, до неадекватності моделі. Складання розгорнутих моделей, коли керування на нижніх рівнях представлено деталізованими моделями, призводить до необачних одержуваних рішень та некомпетентності фахівців, відповідальних за організацію транспортних процесів. Вирішення такої ситуації може бути у створенні комплексу взаємопов'язаних багаторівневих моделей планування та управління, що відображають ієрархію комунікаційної мережі та відповідний їй ступінь агрегування показників. Оскільки фізична просторова структура більшості існуючих мереж вже склалася, насамперед, найбільший інтерес представляє вирішення завдань тактичного планування та оперативного управління, націлених головним чином на оптимізацію їх функціонування за наявних ресурсів на конкретно заданих проміжках часу, коли потоки в мережі та її основні техніко-економічні та експлуатаційні характеристики залишаються досить стабільними.

Ця робота є продовженням низки досліджень ієрархічних мереж з багатопродуктовими дискретними потоками кореспонденцій [1–11]. Під кореспонденцією розуміється пара різних вузлів мережі, між якими є спрямований дискретний потік елементів заданої величини, наприклад, неподільних вантажів уніфікованого розміру в ТМ, байт, кілобайт, мегабайт і т.п. в МПД. У багатопродуктовій мережі кожен вузол може обмінюватися кореспонденціями з іншими вузлами. У транспортній магістральній мережі всі кореспонденції повинні транспортуватися у транспортних блоках (контейнерах, пливковій упаковці, на піддонах) заданого розміру, а в мережі передачі даних – у віртуальних транспортних блоках (віртуальних контейнерах). Розмір транспортних блоків вимірюється кількістю одиниць кореспонденцій, що у них вміщується. Це пов'язано з рядом чинників, найбільш важливими з яких є концентрація потоків при об'єднанні кореспонденцій (тарно-штучних вантажів або потоків даних (потоків повідомлень)) з різними адресами призначення в загальні транспортні блоки, які можуть не збігатися з адресою призначення транспортного блоку. У транспортних мережах це також важливо і для збереження вантажів, можливості їх автоматизованої і механізованої обробки, зберігання на відкритих майданчиках, спрощення обробки супровідної документації та ін. Формування збірних кореспонденцій дозволяє скоротити кількість необхідних транспортних блоків та транспортних засобів, більш ефективно використовувати пропускну спроможність каналів зв'язку. Перед транспортуванням кореспонденції розсортовуються на адреси їх доставки в сортувальних центрах (магістральних вузлах) ТМ, а потім упаковуються в транспортні блоки. В МПД роль сортувальних центрів виконують мультіплектори передачі даних.

Аналіз вітчизняних та зарубіжних літературних джерел, а також робіт в Інтернеті показує слабку вивченість багатопродуктових задач оптимізації обробки та розподілу потоків зі збірними кореспонденціями. Так, в одній з небагатьох робіт [12] розглядається задача маршрутизації збірних тарно-штучних вантажів у багатопродуктовій мережі, в якій інтегруються процеси їх сортування та транспортування та враховуються обмеження на час доставки

вантажів. При цьому в один транспортний блок групуються тільки такі вантажі, у яких збігаються пункти відправлення та призначення і часові вікна доставки, обмеження на пропускні спроможності вузлів та дуг мережі не враховуються. В [13, 14] наводяться багатопродуктові моделі маршрутизації з обмеженнями на пропускні спроможності дуг мережі та з жорсткими (the Hard Transit Time-Constrained, HTC-MCNF) та м'якими (the Soft Ttransit Ttime-Constrained, STC-MCNF) обмеженнями на час доставки вантажів, але вантажі з різними адресами призначення не поєднуються у загальні транспортні блоки.

На відміну від більшості існуючих підходів до моделювання та аналізу функціонування багатопродуктових мереж, у даній роботі розглядаються дискретні моделі транспортних процесів з цілочисловими змінними та параметрами. У практичних задачах повинні враховуватися процеси сортування кореспонденцій (вантажів, або потоків даних) у сортувальних центрах, обмеження на час їх доставки споживачам, коливання потоків та навантажень в окремих вузлах та лініях зв'язку транспортної мережі, вантажопідйомність транспортних засобів або пропускна спроможність каналів зв'язку, нелінійність наведених витрат на обробку та транспортування потоків і багато інших реальних факторів та обмежень. Це призводить до необхідності розробки нових математичних моделей, методів, алгоритмів та інформаційної платформи для управління обробкою, розподілом і маршрутизацією потоків кореспонденцій та визначає важливість досліджуваної науково-прикладної проблеми для розвитку транспорту та зв'язку в Україні.

В [15] розглянута узагальнена задача упаковки і розподілу потоків кореспонденцій в ієрархічній мережі, розв'язання якої здійснюється в кілька етапів. На першому етапі розв'язується задача вибору ієрархічної структури магістральної мережі, схеми сортування кореспонденцій у вузлах мережі та пакування їх у транспортні блоки [2, 5, 7, 9]. На другому етапі постає задача розподілу та маршрутизації потоків транспортних блоків зі збірними кореспонденціями, які були сформовані при розв'язанні першої задачі [6, 8, 11, 16]. В [9] досліджувалася задача оптимізації ієрархічної структури багатопродуктової комунікаційної мережі при зміні її щільності (відношення кількості дуг мережі до максимально можливої кількості дуг для заданого числа вузлів в мережі). Основним завданням дослідження було встановити, як змінюється структура магістральної мережі – кількість і розташування магістральних вузлів, схема обробки і розподілу потоків і техніко-економічні показники функціонування мережі для різного ступеня її щільності.

Метою цієї роботи є математичне формулювання і експериментальне дослідження задачі оптимізації ієрархічної структури мережі при зміні таких її важливих параметрів, як розмір транспортного блоку і вантажопідйомність транспортних засобів або пропускна спроможність каналів зв'язку.

## **Ієрархічна структура мережі**

У мережі виділено три рівні ієрархії – магістральний, зональний та внутрішній та чотири типи вузлів – вузли першого, другого, третього та четвертого типів. Вузли першого, другого і третього типу, що знаходяться на транспортних магістралях ТМ або МПД, і ділянки маршрутів транспортних засобів або каналів зв'язку, що з'єднують магістральні вузли, становлять магістральну мережу. Усі магістральні вузли мають зони обслуговування (ЗОВ), які

утворюють зональні рівні магістральної мережі. Вузли четвертого типу знаходяться у внутрішній зоні обслуговування будь-якого магістрального вузла і разом із ним утворюють внутрішню мережу. Кожен вузол у мережі має назву, географічні координати, унікальний індекс та порядковий номер. Кожному вузлу можна поставити у взаємно-однозначну відповідність множину індексів (номерів) інших вузлів, що кореспондуються з ним у магістральній та внутрішній мережі. На рис. 1 показано фрагменти мережі, а також приклади ЗОВ для вузлів першого, другого та третього типу (де  $m$  – вузли четвертого типу).

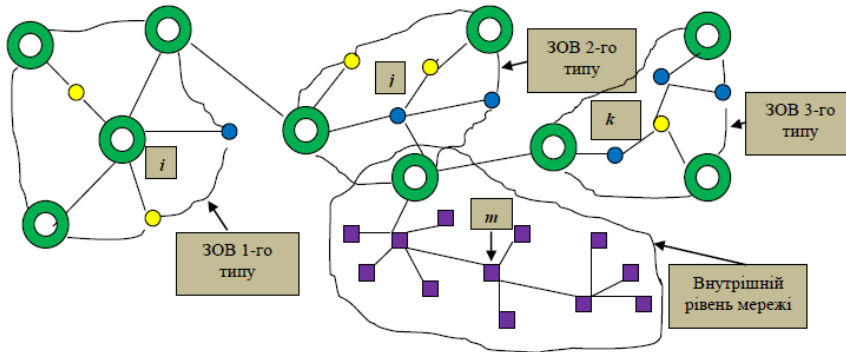


Рис. 1

Усі магістральні вузли є сортувальними центрами, в яких кореспонденції спочатку сортуються за адресами (вузлами) призначення, а потім пакуються як збірні кореспонденції в транспортні блоки. Вузли першого типу можуть сортувати потоки у всі магістральні вузли в зоні свого обслуговування та у всі інші вузли першого типу у магістральній мережі. У вузлах другого і третього типу кількість магістральних напрямів сортування потоків обмежена кількістю вузлів, що знаходяться всередині та на межі їх зон обслуговування. Тому в магістральній мережі, після сортування потоків кореспонденцій та упаковки їх у транспортні блоки, не може бути прямого потоку транспортних блоків між вузлами першого типу та вузлами другого або третього типу і навпаки, якщо вони не знаходяться в одній зоні обслуговування. Вузли другого та третього типу відрізняються від вузлів першого типу функціональними можливостями, рівнем технічної оснащеності, числом обслуговуючого персоналу та ін. У цих вузлах заборонено сортування транзитних потоків кореспонденцій (крім потоків між вузлами четвертого типу у внутрішній мережі). У вузлах третього типу, на відміну від вузлів другого типу, заборонена обробка транзитних потоків транспортних блоків. У вузлах четвертого типу потоки не сортуються, а безпосередньо відправляються у відповідний магістральний вузол. Транспортування кореспонденцій у внутрішній мережі виконується за кільцевими маршрутами внутрішніми транспортними засобами або провайдерами по регіональних каналах зв'язку.

Типи вузлів та зони обслуговування можуть задаватися проєктувальником мережі або визначатися в автоматизованому режимі. У будь-якому випадку вирішується задача вибору оптимальної структури мережі за критерієм мінімуму наведених витрат на її функціонування та встановлюється склад та кількість вузлів кожного типу.

Загальну схему сортування потоків для транспортної мережі показано на рис. 2. Вхідний потік кореспонденцій із загального накопичувача (або накопичувачів) надходить на лінії сортування. Число таких ліній регулюється в залежності від загального обсягу кореспонденцій, що щодобово надходить на сортування. Вхідний потік включає вихідні, вхідні та транзитні кореспонденції та обробляється в міру їх надходження у безперервному режимі або з попереднім накопиченням залежно від інтенсивності потоку. Пристрій зчитування унікальних індексів кореспонденцій (або їх розширених штрих-кодів), розташований на початку кожної лінії, зчитує індекси та передає їх у комп'ютер.

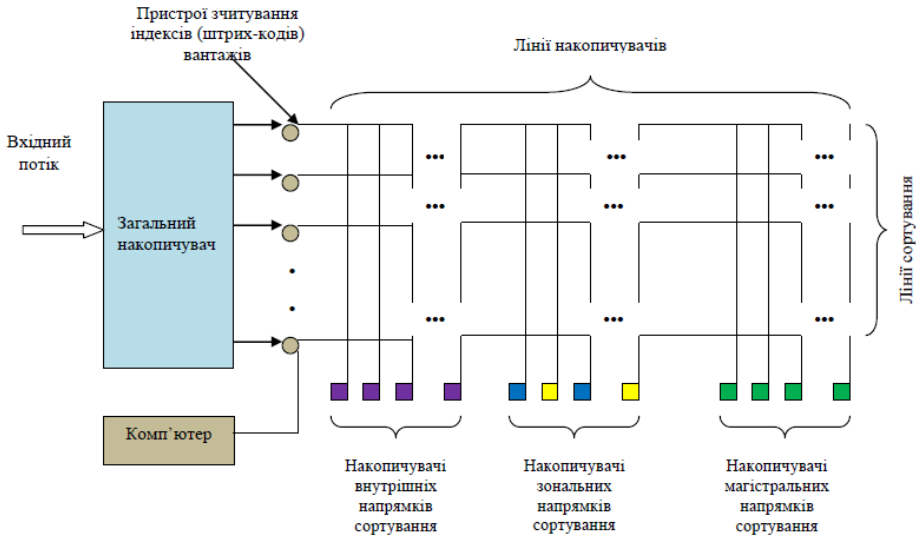


Рис. 2

Розширений штрих-код може містити дані про індекси підприємств відправника та одержувача; про коди юридичних чи фізичних осіб відправників та одержувачів; про дату прийому кореспонденції у транспортному підприємстві відправника та ін. Така розширена інформація про кожну кореспонденцію дає можливість автоматизованого відстеження її просування від відправника до одержувача. У пам'яті комп'ютера зберігаються сортувальні таблиці, що містять групи індексів, що відповідають кожному напрямку сортування. Загальна кількість напрямків сортування визначається сумою магістральних, зональних та внутрішніх напрямків. Відповідно до розшифрованого індексу кореспонденція направляється в потрібний накопичувач. Склад груп індексів, що відповідають внутрішнім та зональним напрямкам сортування, практично постійний та змінюється лише при введенні нових підприємств, що обслуговуються даним вузлом, або зміні зони обслуговування вузла. Кількість та склад магістральних напрямків сортування визначаються після розв'язання задачі упаковки та формування потоків транспортних блоків [17, 18].

У мережах передачі даних також виконуються подібні технологічні операції сортування інформаційних потоків. Сучасні опорні мережі передачі даних з волоконно-оптичними лініями зв'язку і технологіями спектрального ущільнення каналів WDM, DWDM, HDWDM (wavelength-division multiplexing,

dense WDM, high dense WDM) дозволяють мультиплексувати від 16 до 64 і більше спектральних каналів в одній лінії зв'язку і передавати об'єми інформації до 27 Тбіт/с (1 Тбіт =  $10^{12}$  біт) і більше. У таких мережах в ролі «сортувальної машини» виступають мультиплексори, які об'єднують окремі інформаційні потоки у віртуальні контейнери.

Так, наприклад, схожа технологія віртуальних контейнерів, при якій в один віртуальний контейнер можуть об'єднуватися повідомлення з різними адресами призначення, застосовується при побудові перспективних великомасштабних загальнонаціональних і інтернаціональних мереж передачі даних на основі надширокосмугових каналів і схем типу опорної мережі (backbone). Відома, наприклад, Європейська опорна мережа E-bone. В даний час при проектуванні таких мереж використовуються метод комутації каналів, європейська технологія синхронної цифрової ієрархії (Synchronous Digital Hierarchy, SDH) або американська технологія синхронних оптичних мереж (Synchronous Optical NETs, SONET) із застосуванням оптоволоконних ліній зв'язку та спектрального ущільнення каналів WDM, DWDM, HDWDM.

### Математична модель мережі, функції витрат та задача оптимізації структури мережі

Згідно з введеними поняттями визначимо математичну модель ієрархічної мережі. Нехай фізична мережа задана зв'язним графом  $\hat{G}(\hat{N}, \hat{P})$  з множиною вузлів  $\hat{N} = N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4$ ,  $\hat{n} = |\hat{N}|$ , і множиною дуг  $\hat{P}$ ,  $\hat{p} = |\hat{P}|$ , де  $N_1, N_2, N_3, N_4$  – множини вузлів першого, другого, третього і четвертого типу,  $\hat{n}$  і  $\hat{p}$  – відповідно число вузлів і дуг мережі, а  $||$  – знак потужності множини. Дуги є ділянками доріг або лініями зв'язку і можуть бути як орієнтованими, так і не орієнтованими. Довжини дуг задані матрицею  $\hat{R} = ||\hat{r}_{ij}||_{\hat{n} \times \hat{n}}$ ,  $\hat{r}_{ij} \in R^1$ ,  $(i, j) \in \hat{P}$ , де  $R^1$  – множина дійсних чисел. Потоки дискретних потоків кореспонденцій між усіма парами вузлів задані цілочисловою матрицею  $\hat{A} = ||\hat{a}_{ij}||_{\hat{n} \times \hat{n}}$ , де  $\hat{a}_{ij}$  – потік з вузла  $i$  у вузол  $j$ ,  $i, j = \overline{1, \hat{n}}$ ,  $i \neq j$ . Визначимо також магістральну мережу  $G(N, E)$  з множиною вузлів  $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ ,  $n = |N|$ , множиною дуг  $E$ ,  $e = |E|$  і внутрішні мережі  $\tilde{G}_k(\tilde{N}_k, \tilde{P}_k)$ ,  $\tilde{N}_k = \{N_0^k, N_4^k\}$ ,  $N_0^k \in N$ ,  $N_4^k \subseteq N_4$ ,  $|N_0^k| = 1$ ,  $n_k = |\tilde{N}_k| = 1 + |N_4^k|$ ,  $p_k = |\tilde{P}_k|$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

Для внутрішніх мереж виконується умова  $\bigcap_{k=1}^n \tilde{G}_k(\tilde{N}_k, \tilde{P}_k) = \emptyset$ . Для повної мережі є процедура редукції  $\varphi: \hat{G}(\hat{N}, \hat{P}) \Rightarrow G(N, E) + \bigcup_{k=1}^n \tilde{G}_k(\tilde{N}_k, \tilde{P}_k)$ , яка відповідно до принципів сортування і транспортування кореспонденцій в ієрархічній мережі перетворює потокову матрицю  $\hat{A} = ||\hat{a}_{ij}||_{\hat{n} \times \hat{n}}$  в матриці



$A = \left\| a_{ij} \right\|_{n \times n}$  і  $\tilde{A}_k = \left\| \tilde{a}_{ij}^k \right\|_{n_k \times n_k}$ , а матрицю довжин дуг  $\hat{R} = \left\| \hat{r}_{ij} \right\|_{\hat{n} \times \hat{n}}$  – відповідно в матриці  $R = \left\| r_{ij} \right\|_{n \times n}$  і  $\tilde{R}_k = \left\| \tilde{r}_{ij}^k \right\|_{n_k \times n_k}$ ,  $k = \overline{1, n}$ . У матриці  $A$  значення  $a_{ii}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , визначають внутрішні об'єми на обробку потоків в магістральній мережі.

Процедура редукції дозволяє автоматизованим способом перетворити дані початкової повної мережі в дані магістральної і внутрішніх мереж при зміні її структури і супідрядності вузлів четвертого типу магістральним вузлом.

Що стосується функцій витрат на обробку та транспортування потоків, то при практичному проектуванні і аналізі комунікаційних мереж повинні використовуватися реальні вартісні показники, наприклад середньорічні приведені витрати на обробку і транспортування потоків. На практиці існує безліч різних функцій, використовуваних для розрахунку витрат на функціонування мережі. У міру організаційно-технічного вдосконалення мережі ці функції постійно піддаються змінам і уточненням. У кожному випадку визначення адекватних функцій витрат є складним завданням, яке має бути вирішене окремо перед проведенням чисельного моделювання. Очевидно, що при вирішенні задач оптимізації в цільову функцію мають бути включені тільки найбільш важливі складові витрат, залежні від шуканих змінних. У сформульованих нижче задачах передбачається використання в усіх складових цільової функції капітальних і експлуатаційних витрат, приведених до порівнянного виду.

Як правило, в математичних моделях, що описують процеси обробки і транспортування потоків, витрати зв'язують з величиною потоку по дугах мережі або шляхах передачі потоку. Для мереж передачі даних, де дуги асоціюються з каналами зв'язку, такі постановки виявляються досить прийнятними. У разі транспортних мереж значно складніше адекватно визначити вартісні функції, отже і отримати в результаті вирішення задачі достовірну відповідь. Представлення поточкових задач у вигляді задач лінійного програмування з вартісними коефіцієнтами взагалі може виявитися абсурдним з практичної точки зору. За переконанням авторів, в реальних задачах треба розраховувати транспортні витрати по маршрутах транспортних засобів, тобто зв'язувати об'єми і шляхи розподілу потоків з множиною шуканих «оптимальних» маршрутів [11, 15, 16]. Для кожного визначеного в результаті вирішення маршруту, знаючи його характеристики (довжину, вантажопідйомність і тип транспортного засобу і ін.), легко розрахувати середньорічні приведені витрати для кожного маршруту і отримати достовірнішу оцінку транспортних витрат для усієї мережі перевезень. «Маршрутний» підхід прийнятний і для мереж передачі даних, оскільки кожен маршрут – це або орієнтована дуга, або послідовність таких дуг (комутовані канали).

У задачі оптимізації структури мережі не вводяться «маршрутні» функції витрат, оскільки вона є однією з перших підзадач узагальненої задачі обробки, розподілу і маршрутизації кореспонденцій [15]. При її вирішенні розраховується тільки орієнтовна оцінка транспортних витрат і нижня межа витрат на обробку транспортних блоків.

Задача оптимізації упаковки кореспонденцій і вибору структури мережі виникає у магістральних транспортних мережах і опорних мережах передачі даних з потоками дискретних кореспонденцій від постачальників до одержувачів, суть якої полягає в концентрації потоків вантажів і інформації між вузлами мережі [17, 18]. Дискретні кореспонденції з різними адресами призначення, що виходять з вузлів мережі, можуть об'єднуватися одна з іншою і упаковуватися в загальні транспортні блоки (контейнери або віртуальні контейнери). В результаті об'єднання потоків зменшується кількість транспортних блоків для транспортування кореспонденцій, скорочується число напрямів сортування кореспонденцій у вузлах мережі в інші вузли, збільшується коефіцієнт завантаження транспортних блоків і транспортних засобів, більш продуктивно використовується висока пропускна спроможність магістральних каналів зв'язку. В той же час в окремих вузлах мережі виникають транзитні потоки кореспонденцій, що призводить до збільшення загальної вартості обробки потоків в мережі і збільшення часу доставки кореспонденцій одержувачам.

Нехай  $G(N, E)$  – ієрархічна магістральна мережа з множиною вузлів  $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ ,  $n = |N|$ , де  $N_1, N_2, N_3$  – множини вузлів першого, другого і третього типу відповідно і множиною орієнтованих дуг  $E$ ,  $e = |E|$ . Вважатимемо, що мережа така, що для кожної прямої дуги  $kl, k < l$  існує зворотна  $lk, l > k$ . Дуга представляє маршрут транспортного засобу або комутовану лінію зв'язку мережі передачі даних, кінцеві вузли яких збігаються з початковим і кінцевим вузлом дуги. Передбачається, що географічні координати розміщення вузлів мережі відомі і відома цілочислова матриця потоків кореспонденцій між усіма вузлами мережі  $A = \| a_{ij} \|_{n \times n}$ , у якої рядки відповідають вузлам відправлення, а стовпці – вузлам призначення, і є деяка перетворена матриця  $X = \| x_{ij} \|_{n \times n}$ , елементи якої є цілочисловими шуканими змінними задачі упаковки. Усі кореспонденції однорідні (одного типу), при транспортуванні можуть об'єднуватися в різних вузлах і упаковуватися в транспортні блоки тільки цілком, тобто забороняється їх розгалуження (розщеплювання, дроблення на частини) і транспортування по декількох шляхах. Потоки  $a_{ii}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , у матриці  $A$  представляють внутрішні потоки між вузлами четвертого типу в зоні обслуговування  $i$ -го вузла, які по магістральній мережі не транспортуються. Усі кореспонденції у магістральній мережі повинні транспортуватися в деяких транспортних блоках заданого розміру  $\omega \gg a_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $i \neq j$ ,  $\omega \in Z^+$ . Нехай  $S$  – множина пар індексів  $(i, j)$  вузлів, що кореспондуються;  $x_{ij}$ ,  $u_{ij}$  – змінні, що визначають відповідно величину потоку з  $i$  у  $j$  у кореспонденціях і транспортних блоках. Первинно всі  $x_{ij} = a_{ij}$ , а  $u_{ij} = \left\lceil \frac{x_{ij}}{\omega} \right\rceil$ , ( $\lceil x \rceil$  – найменше ціле, більше або рівніше  $x$ ),  $ij \in S$ ;  $w_{kl}$ ,  $kl \in E$  – пропускні спроможності дуг мережі в транспортних блоках,

$w_{kl} \in \{w_1, w_2, \dots, w_\alpha\}$ ,  $w_i$ ,  $i = \overline{1, \alpha}$  – впорядковані за зростанням цілі позитивні числа;  $d_{kl} \in R^+$ ,  $kl \in E$  – довжини дуг;  $C_{tr}^{kl}(w_{kl}, d_{kl}) \in R^+$ ,  $kl \in E$  – дискретні вартості дуг, такі, що  $C_{tr}^{kl}(w_i, d_{kl}) \leq C_{tr}^{kl}(w_{i+1}, d_{kl})$ ,  $i = \overline{1, \alpha-1}$ ;  $h_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  – максимальна пропускна спроможність  $i$ -го вузла по обробці транзитних кореспонденцій. Для вузлів другого та третього типу  $h_i = 0$ ;  $t_{ij}$ ,  $T_{ij}$ ,  $ij \in S$  – розрахунковий і заданий час на доставку потоків  $a_{ij}$  з  $i$  у  $j$ ;  $v_{ij}$ ,  $ij \in S$ ,  $v_{\max}$  – кількість транзитних об'єднань (злиття) потоку  $a_{ij}$  з іншими потоками і максимально допустима кількість транзитних об'єднань.

Оскільки при розв'язанні задачі упаковки кореспонденцій невідомі фактичні шляхи розподілу потоків транспортних блоків по маршрутах транспортних засобів або каналах зв'язку, у задачі розраховується тільки орієнтовна оцінка транспортних витрат і нижня межа витрат на обробку транспортних блоків. Тому в якості  $C_{tr}^{kl}(w_{kl}, d_{kl})$  прийнята функція  $C_{tr}^{ij}(u_{ij}, d_{ij})$  питомої вартості транспортування потоку величиною  $u_{ij}$  на відстань  $d_{ij}$  від вантажопідйомності транспортного засобу або пропускної спроможності каналу зв'язку, що задається у вигляді параметра  $w_\xi \in \{w_1, w_2, \dots, w_\alpha\}$ ,  $\xi = \overline{1, \alpha}$ . Наприклад, можна вважати, що  $C_{tr}^{ij}(u_{ij}, d_{ij}) = u_{ij}(k_1^\xi + k_2^\xi d_{ij}) / w_\xi$ ,  $\xi = \overline{1, \alpha}$ ,  $\forall ij \in S$ , де  $k_1^\xi$ ,  $k_2^\xi$  – задані коефіцієнти.

При розв'язанні задачі виникає питання: як структура мережі залежить від вибору значення  $w$  та  $\omega$ . Зазначимо, що всі витрати для всіх значень  $w$  та  $\omega$  розраховуються лише орієнтовно при розподілі сформованих потоків транспортних блоків по найкоротших шляхах за лексикографічним критерієм: мінімум дуг у шляху, мінімум довжини шляху [19].

Вимагається визначити кількісний і якісний склад вузлів мережі і схему сортування кореспонденцій в кожному вузлі, при яких максимально знижуються приведені витрати на функціонування мережі. Формально, необхідно для усіх можливих комбінацій типів вузлів розв'язати задачу упаковки і знайти мінімум функції

$$F = \sum_{ij \in S} C_{tr}^{ij}(u_{ij}, d_{ij}) + \sum_{i=1}^n C_{sort}^i(x_i, q_i) + \sum_{i=1}^n C_{load}^i(u_i) \quad (1)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ji} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ji}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} \leq h_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$t_{ij} \leq T_{ij}, \quad \forall ij \in S, \quad (4)$$

$$v_{ij} \leq v_{\max}, \quad \forall ij \in S, \quad (5)$$

$$x_{ij}, u_{ij} \geq 0 \text{ і цілі.} \quad (6)$$

Перша складова функції (1) визначає транспортні витрати, друга – витрати на сортування, а третя – витрати на обробку транспортних блоків. Вирази (2) і (3) представляють умови балансу і обмеження на пропускні спроможності вузлів, а (4), (5) і (6) відповідно – обмеження на час доставки та кількість транзитних об'єднань кореспонденцій і значення змінних.

У наведених виразах  $C_{sort}^i(x_i, q_i)$  – нелінійна функція витрат від сумарного об'єму  $x_i = a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n (a_{ij} + a_{ji}) + \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}$  і кількості напрямів сортування  $q_i = q_{in}^i + \sum_{j=1}^n \delta_{ij}$  кореспонденцій, що обробляються у вузлі  $i$  ( $\delta_{ij} = 1$ , якщо  $x_{ij} \neq 0$  і  $\delta_{ij} = 0$ , якщо  $x_{ij} = 0$ , а  $q_{in}^i$  визначає задану кількість напрямів сортування для обробки кореспонденцій  $a_{ii}$ ,  $i = \overline{1, n}$ );  $C_{load}^i(u_i)$  – нелінійна функція витрат від сумарної кількості транспортних блоків  $u_i = \sum_{j=1}^n (u_{ij} + u_{ji})$ , оброблюваних у вузлі  $i$ . Функції  $C_{sort}^i(\cdot)$ ,  $C_{load}^i(\cdot)$ ,  $i = \overline{1, n}$  можуть бути як опуклими, так і увігнутими для різних комунікаційних мереж. Так, наприклад, для розв'язання задачі (1)-(6) в транспортній мережі в цій роботі використаний наступний конкретний вид функцій:

$$C_{sort}^i(x_i, q_i) = k_3^i x_i \exp\left(-\frac{k_4^i x_i}{1 + q_i}\right), \quad i = \overline{1, n},$$

$$C_{load}^i(u_i) = \sqrt{k_5^i u_i^2 + k_6^i u_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

де  $k_3^i, k_4^i, k_5^i, k_6^i, i = \overline{1, n}$  – задані коефіцієнти.

Після розв'язання задачі  $x_{ij} = a_{ij} + \sum_{rs} a_{rs}^*$ , якщо кореспонденція  $a_{ij}$  не об'єднувалася ні з якою іншою кореспонденцією, де  $\{a_{rs}^*\}$  – множина кореспонденцій, об'єднаних з кореспонденцією  $a_{ij}$ , і  $x_{ij} = 0$ , якщо кореспонденція  $a_{ij}$  об'єднувалася з будь-якою іншою кореспонденцією або  $i = j$ .

При розрахунку часу доставки використовуються параметри, які явно не входять у модель: заданий час на сортування кореспонденцій  $T_a$  і час на транзитне перевантаження транспортних блоків у вузлах мережі  $T_b$ , середня швидкість руху транспортних засобів або передачі повідомлень  $V_{av}$  та ін. (див. експериментальний розділ).

У [18] запропоновано алгоритми для розв'язання задачі упаковки з функціями витрат на обробку і транспортування кореспонденцій, які ґрунтовані на дискретному аналогу методу локального спуску, коли околиці метричного простору допустимих розв'язків вибираються з евристичних міркувань з урахуванням специфіки структур даних і особливостей задачі. Слід зазначити, що при розв'язанні задачі можна не враховувати обмеження на пропускні спроможності вузлів (3). Додаткові обмеження (4) і (5) можуть

також не враховуватися, проте на вимогу проектувальника транспортної мережі або адміністратора мережі передачі даних усі обмеження можуть бути задані як директивні.

В процесі розв'язання задачі визначається не лише структура мережі, але і оптимальна схема сортування вихідних потоків кореспонденцій у вибраній структурі. Якщо при цьому використовуються функції приведених витрат  $C_{sort}^i(x_i, q_i)$ ,  $C_{load}^i(u_i)$ , адекватні процесам сортування і оброблення, то для вузлів мережі можна отримати досить реальну оцінку їх величини, тобто визначити необхідні приведені витрати на функціонування вузлів на період тактичного планування (друга складова функції (1) і частково третя – без урахування витрат на транзитне перевантаження транспортних блоків). Для транспортних витрат і витрат на обробку транспортних блоків розраховуються тільки попередні оцінки. Реальні оцінки цих витрат можуть бути отримані тільки після розв'язання задачі розподілу і маршрутизації сформованих транспортних блоків на транспортній мережі або мережі передачі даних (у витратах на обробку транспортних блоків у вузлах мережі враховуються тільки вхідні і вихідні потоки, – транзитні потоки не враховуються; для транспортних мереж не враховуються витрати на перевезення і обробку порожніх контейнерів).

Крім структури мережі, основними результатами розв'язання задачі є потокові матриці  $X = \|x_{ij}\|_{n \times n}$  та  $U = \|u_{ij}\|_{n \times n}$  кореспонденцій та транспортних блоків; матриця попередніх оцінок часу доставки кореспонденцій одержувачам  $\tilde{T} = \|\tilde{t}_{ij}\|_{n \times n}$ ; довідкова матриця об'єднання потоків кореспонденцій  $C = \|c_{ij}\|_{n \times n}$  [20], елементи якої визначаються так:

$$c_{ij} = \begin{cases} k, & \text{якщо потік } a_{ij} \text{ об'єднується з потоком } a_{ik}, \\ i, & \text{якщо потік } a_{ij} \text{ безпосередньо направляється в вузол } j, \\ 0, & \text{якщо } i = j, \end{cases} \quad (7)$$

де  $k$  – вузол, через який виконується перетворення потоку  $a_{ij}$ . Матриця  $C$  використовується для відновлення послідовності вузлів мережі  $\Omega_{ij} = \{(i, k_1), (k_1, k_2), \dots, (k_m, j)\}$  з проміжними вузлами  $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ , в яких виконується додаткове (транзитне) сортування кожного з потоків  $a_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $i \neq j$ , та їх загальне число  $v_{ij} = |\{k_1, k_2, \dots, k_m\}|$ , та розрахунку  $t_{ij}$  – часу їх доставки кінцевим одержувачам. Ці результати використовуються як вхідні дані для розв'язання задачі розподілу та маршрутизації потоків транспортних блоків. Довідкова матриця об'єднання потоків повністю визначає схему сортування кореспонденцій у всіх вузлах мережі та адресує потоки транспортних блоків, які будуть розподілені по маршрутах транспортних засобів або каналах зв'язку. У вузлах реальної транспортної мережі або мережі передачі даних довідкова матриця використовується для автоматизованого управління обладнанням, що здійснює процеси сортування адресних вантажів, або як таблиця злиття повідомлень у віртуальні контейнери.

При чисельному моделюванні задачі (1)-(6) проєктувальникові виводяться до і після оптимізації наступні показники: повні витрати; транспортні витрати; витрати на сортування потоків кореспонденцій у вузлах мережі; витрати на навантаження-вивантаження (обробку) транспортних блоків у вузлах мережі; витрати на придбання транспортних блоків; загальна кількість транспортних блоків в мережі, необхідна для відправлення усіх потоків в мережі; середній коефіцієнт завантаження транспортного блоку в мережі; середнє число напрямів сортування потоків кореспонденцій у вузлах мережі; сумарний об'єм транзитної обробки потоків кореспонденцій у вузлах мережі; мінімальний, максимальний і середній час доставки кореспонденцій одержувачеві та ін.

### **Комп'ютерна програма оптимізації структури мережі та результати чисельного експерименту**

По суті, моделювання ієрархічної структури комунікаційної мережі є комп'ютерною технологією, що складається зі сценаріїв дій проєктувальника і програмної системи при виборі структури, вхідних даних і параметрів мережі, що проєктується. В інформаційно-аналітичній системі підтримки прийняття рішень (ІАС ППР) [4, 21, 22] сценарії реалізовані у вигляді багатовіконного та багатошарового графічного інтерфейсу, що дозволяє в картографічному вигляді переглядати структуру мережі та її окремі фрагменти; вихідні та вхідні потоки у вузлах мережі; значення всіх заданих обмежень та параметрів оптимізації; результати оптимізації для різних варіантів розв'язання задачі та ін. Проєктувальник у режимі діалогу може змінювати значення вихідних даних та параметрів задачі, отримувати множину розв'язків і вибирати з них найбільш сприятливий. При цьому він завжди може порівняти варіанти розв'язків щодо оцінки техніко-економічних показників функціонування мережі залежно від вибраних параметрів та критеріїв вподобання. Для експериментального дослідження розв'язання задачі вибору структури мережі та схеми сортування потоків, а також для навчання диспетчерів роботі з програмою розроблено її демонстраційну версію [5, 23]. Така програма включена до ІАС ППР і може працювати в автономному режимі, коли всі необхідні вхідні дані генеруються датчиком псевдовипадкових чисел. ІАС ППР розробляється в Інституті телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України і у перспективі буде функціонувати в масштабі реального часу та дозволяти ефективно керувати нелінійними та нестационарними процесами обробки та розподілу потоків на всіх рівнях ієрархічної мережі.

На рис. 3 показана головна форма програми, у яку вводяться вхідні дані. У ній можна вибрати різні варіанти роботи програми та вказати, чи потрібно оптимізувати структуру мережі в автоматизованому режимі чи вводити типи вузлів та зони їх обслуговування вручну, використовувати в алгоритмах розв'язання задачі функції витрат чи ні. Для зміни початкової величини потоків у процесі розв'язання задачі може використовуватись коефіцієнт прогнозування потоків ( $K_p$ ), початкове значення якого за замовчуванням встановлено рівним одиниці. У нижній частині головної форми розташовані вікно для виведення поточних повідомлень програми та кнопки активізації дій.

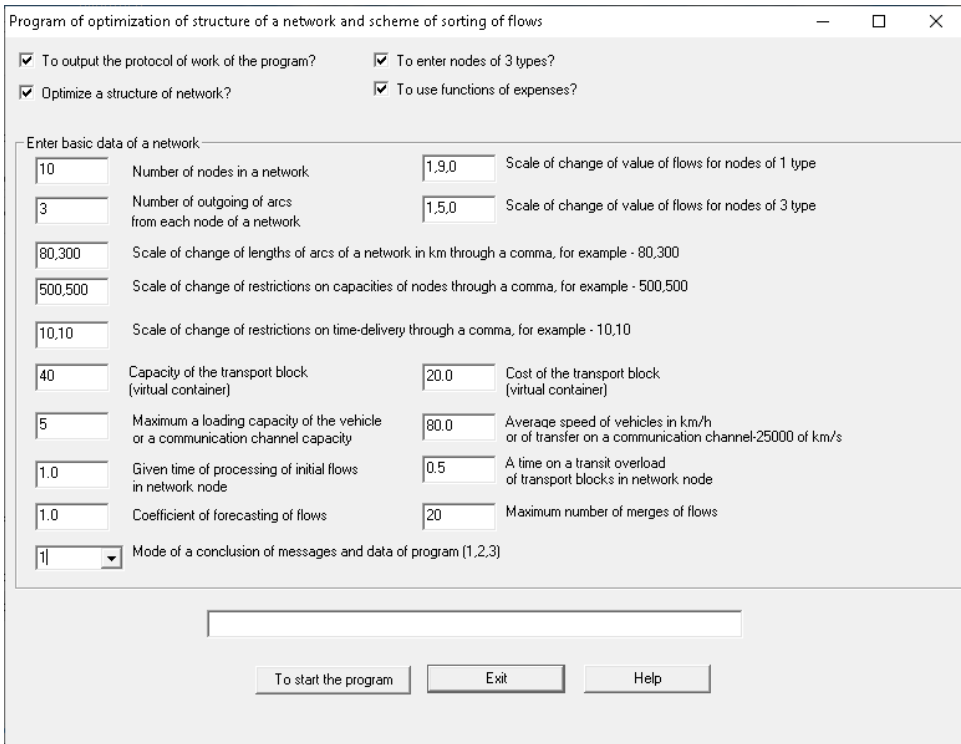


Рис. 3

Усі вихідні дані виводяться у два набори даних *outlopt* та *outl* і відображаються на екрані комп'ютера за допомогою системної програми WordPad. У форму *outlopt* виводяться обрана структура мережі та основні техніко-економічні показники її функціонування. У форму *outl* для кожного вузла мережі у відредагованому вигляді виводиться схема сортування потоків кореспонденцій та формування потоків транспортних блоків. Якщо задача вибору структури вирішується для транспортної мережі, то на початок форми *outl* додатково виводяться результати розв'язання задачі балансування матриці контейнерних потоків, що виникає через порушення умов балансу – рівності суми вихідних та вхідних контейнерів в окремих вузлах мережі. Балансування матриці виконується під час розв'язання задачі розвезення порожніх контейнерів [24].

**Числовий приклад.** Для проведення обчислювального експерименту датчиком псевдовипадкових чисел генерувалася транспортна мережа з числом вузлів  $n=10$  і ступенем вузлів  $val=3$ . Довжини дуг змінювалися в межах від 80 до 300 км, а величина вихідних потоків вантажів із вузлів першого типу задавалася в межах від 1 до 9 одиниць, із вузлів другого та третього типу – у межах від 1 до 5 одиниць. Прийнято такі значення обмежень і параметрів: пропускні спроможності вузлів з обробки транзиту однакові і  $h_i = 500, i = 1, n$  одиниць вантажів; максимальний час доставки вантажів одержувачу однаковий для всіх кореспонденцій та  $T_{ij} = 10, ij \in S$  діб; початковий розмір транспортного блоку (контейнера)  $\omega = 10$  одиниць вантажів; початкова вантажопідйомність транспортних засобів на маршрутах руху  $w = 5$  контейнерів; час на сортування вантажів у вузлах мережі  $T_a = 1$  доба; час на

транзитне перевантаження контейнерів у вузлах мережі  $T_b = 0,5$  діб; час стоянки транспортних засобів в кінцевих пунктах слідування  $T_{end} = 22$  год.; періодичність руху транспортних засобів  $T_{move} = 24$  год.; вартість одного контейнера  $C_{con} = 20$  умовних одиниць (у.о.); середня швидкість руху транспортних засобів  $V_{av} = 80$  км/год; максимальна допустима кількість транзитних об'єднань вантажів  $V_{max} = 20$ , тобто не обмежувалася; режим виведення повідомлень та результатів розв'язання задачі  $Mode=1$ . Усі вхідні дані для розв'язання задачі при  $w = 5$ ,  $\omega = 40$  показані на рис. 3.

При розв'язанні задачі розраховувалися в у.о. до та після оптимізації: повні витрати у мережі  $F$ , транспортні витрати  $C_{tr}$ , витрати на сортування вантажів  $C_{sort}$ , витрати на навантаження та вивантаження контейнерів у транспортні

засоби  $C_{load}$ ; загальна кількість контейнерів у мережі  $U = \sum_{ij \in S} \left\lceil \frac{a_{ij}}{\omega} \right\rceil$ ,

$U = \sum_{ij \in S} \left\lceil \frac{x_{ij}}{\omega} \right\rceil$ ; середній коефіцієнт завантаження контейнера

$K_{av} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\delta_i} \sum_{j=1}^n x_{ij} / \left( \left\lceil \frac{x_{ij}}{\omega} \right\rceil \omega \right)$ ,  $\delta_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij}$ ; середня кількість напрямів

сортування вантажів у вузлі мережі  $N_{av} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i$ ; значення мінімального

min flow та максимального max flow потоку контейнерів по дузі мережі.

Для розрахунку наведених середньорічних витрат на обробку і транспортування потоків використовувалися конкретні функції:

$$C_{tr}^{ij}(\cdot) = \frac{u_{ij}}{w} \left[ \frac{13939, 2(T_{end} + 2d_{ij} / V_{av})}{T_{move}} + 7200 + 116,8d_{ij} \right] \quad \forall ij \in S;$$

$$C_{sort}^i(\cdot) = 16,8892975x_i \exp\left(-\frac{17,74x_i}{1+q_i}\right), \quad i = \overline{1, n};$$

$$C_{load}^i(\cdot) = \sqrt{25595u_i^2 + 2629u_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для розрахунку часу доставки вантажів кінцевому одержувачеві застосовувалися наступні формули:

$$t_{ij} = \begin{cases} 2t_a + d_{ij} / (V_{av}\theta) + \psi_{ij}t_b, & \text{якщо } c_{ij} = i, \\ t_a(v_{ij} + 2) + \sum_{\xi\eta \in \Omega_{ij}} (d_{\xi\eta} / (V_{av}\theta) + \psi_{\xi\eta}t_b), & \text{якщо } c_{ij} \neq i, \end{cases}$$

де  $\psi_{ij}$ ,  $\psi_{\xi\eta}$  – кількість транзитних перевантажень контейнера, в якому знаходиться вантаж  $a_{ij}$  на ділянці  $(i, j)$  або



$(\xi, \eta) \in \Omega_{ij} = \{(i, k_1), (k_1, k_2), \dots, (k_m, j)\}$ ,  $d_{ij}$ ,  $d_{\xi\eta}$  – відстань ділянки,  $\theta$  – коефіцієнт нормування часу (для транспортних мереж  $\theta = 24$  години, для мереж передачі даних  $\theta = 1$ ),  $c_{ij}$  – елементи довідкової матриці об'єднання потоків кореспонденцій  $C = \parallel c_{ij} \parallel_{n \times n}$  (7).

Робота програми виконувалася в автоматизованому режимі, коли у головній формі зазначені поля «оптимізація структури мережі» та «вводити вузли третього типу». Після старту та повідомлення програми про кількість генерованих вузлів другого та третього типу, необхідно ввести потенційно можливу максимальну кількість вузлів другого та третього типу, які можуть бути включені до структури проєктованої мережі. Після відповіді проєктувальника програма починає оптимізувати структуру мережі, повідомляє про кількість вузлів другого та третього типу, включених до мережі, та виводить форми  $out1opt$  та  $out1$  для найкращого розв'язку задачі. Для кожної обраної конфігурації структури мережі у програмі ітеративно розв'язується задача (1)-(6) для наростаючих значень кількості транзитних об'єднань вантажів  $\nu \leftarrow \nu + 1$ , які є радіусами околиці пошуку екстремуму в алгоритмах локального спуску. Значення  $\nu$  збільшується, доки значення цільової функції (1) перестануть змінюватися або  $\nu \leq \nu_{max}$ . У роботі [18] запропоновано дві групи алгоритмів локального спуску для розв'язання задачі (1)-(6). Перша група алгоритмів використовує задані функції витрат  $C_{tr}^{ij}$ ,  $C_{sort}^i$  і  $C_{load}^i$ , друга – ні. Розробка алгоритмів другої групи обґрунтована тим, що для реальних комунікаційних мереж складно визначити функції, які достатньо адекватно характеризують витрати на процеси обробки та транспортування потоків кореспонденцій. Ці алгоритми орієнтовані на максимальне скорочення транспортних блоків у мережі, не використовують у своїй роботі функції витрат, але отримані ними розв'язки оцінюються (за заданими функціями витрат). Алгоритми першої групи показують кращі результати, але мають високі оцінки часової складності порядку  $O(C_1 \nu_{max} n^5)$ , складність алгоритмів другої групи становить від  $O(C_2 \nu_{max} n^4)$  до  $O(C_3 \nu_{max} n^2)$ , де  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  – деякі константи. В [18] експериментально показано, що результати розв'язання задачі (1)-(6), отримані різними групами алгоритмів на мережах, що містять до 500 вузлів, відрізняються не більше ніж на 2,65%.

Початкова структура мережі генерувалася так, щоб кожен потенційний вузол другого або третього типу був пов'язаний у своїй зоні обслуговування тільки із суміжними вузлами першого типу. Це обмеження дозволяє для будь-якої мережі із заданими параметрами згенерувати певну кількість вузлів другого або третього типу і надати структурі мережі більш правдоподібний вигляд. Так, наприклад, для мережі з  $n = 10$  та  $val = 3$  спочатку було генеровані 4 потенційних вузли третього типу та 6 вузлів першого типу. У процесі оптимізації 4 вузли третього типу набули статусу вузлів другого типу, тому що кожен з них потенційно може бути транзитним вузлом для перевантаження контейнерів з одного транспортного засобу на інший.

Результати розв'язання задачі для всіх значень  $w$  та  $\omega$  наведено у табл. 1 і 2. У таблицях прийнято позначення:  $F$ ,  $F_0$ ,  $F_{min}$  – відповідно значення функції (1)

(в умовних одиницях наведених витрат) до і після оптимізації;  $V_{opt}$  – кількість об'єднань кореспонденцій, при якій досягнуто локального оптимуму;  $n_1, n_2, n_3$  – кількість вузлів першого, другого та третього типу;  $t_{av}$  – середній час доставки кореспонденцій одержувачу (діб);  $t_{sol}$  – час розв'язання задачі (у секундах).

Таблиця 1. Основні результати розв'язання задачі для  $n = 10, val = 3, r_{ij} \in [80, 300], (i, j) \in E, a_1 \in [1, 9, 0], a_2 \in [1, 5, 0], t_a = 1$  доба,  $t_b = 0,5$  діб,  $V_{av} = 80$  км/год, при зміні значень  $w_\xi, \xi = \overline{1,7}$  та  $\omega = 40$

Значення $w_\xi,$ $\xi = \overline{1,7}$	$F, C_{tr}, C_{sort}, C_{load}, (y.o.),$ $U, K_{av}, N_{av},$ $min\ flow, max\ flow$		$F_0 - F_{min}$ y.o.	$V_{opt}$	$n_1$ $n_2$ $n_3$	$t_{av}$ діб	$t_{sol}$ с
	До оптимізації	Після оптимізації					
5	596715	188301	408413	5	<b>10</b> <b>0</b> <b>0</b>	3.53	1.93
	520206	125591					
	47629,2	53349,4					
	28879,2	9360,86					
	90, 0.087, 9, 3, 8	29, 0.587, 2, 1, 2					
10	336612	128243	208368	5	<b>10</b> <b>0</b> <b>0</b>	3.52	1.87
	260103	65245,5					
	47629,2	53316,8					
	28879,2	9680,84					
	90, 0.087, 9, 3, 8	30, 0.566, 2, 1, 2					
20	182772	94928,0	87844,1	3	<b>9*</b> <b>1</b> <b>0</b>	3.41	1.28
	109705	32271,5					
	48027,5	52975,6					
	25039,6	9680,85					
	78, 0.112, 7, 2, 8	30, 0.542, 2, 1, 2					
40	141534	77850,7	63683,6	3	<b>10</b> <b>0</b> <b>0</b>	3.42	1.74
	65025,8	16271,8					
	47629,2	52218,0					
	28879,2	9360,85					
	90, 0.087, 9, 3, 8	29, 0.510, 2, 1, 3					
60	119859	72086,4	47772,6	3	<b>10</b> <b>0</b> <b>0</b>	3.48	1.48
	43350,5	10828,2					
	47629,2	51897,4					
	28879,2	9360,86					
	90, 0.087, 9, 3, 8	29, 0.499, 2, 1, 3					
80	109021	68823,0	40198,4	2	<b>10</b> <b>0</b> <b>0</b>	3.46	1.78
	32512,9	8267,92					
	47629,2	51514,2					
	28879,2	9040,85					
	90, 0.087, 9, 3, 8	28, 0.475, 2, 1, 3					
100	102519	67498,7	35020,1	3	<b>10</b> <b>0</b> <b>0</b>	3.49	1.76
	26010,3	6750,99					
	47629,2	51386,9					
	28879,2	9360,83					
	90, 0.087, 9, 3, 8	29, 0.443, 2, 1, 3					

\*)  $F_{min} = 94928,0$  при  $n_2 = 1$  і  $V_{opt} = 3$ ;  $F^* = 96575,6$  при  $n_2 = 0$  і  $V_{opt} = 3$ ;

$F^* - F_{min} = 1647,6$  y.o., (1,74 %). Див. рис. 4.

Таблиця 2. Основні результати розв'язання задачі для  $n = 10$ ,  $val = 3$ ,  $r_{ij} \in [80, 300]$ ,  $(i, j) \in E$ ,  $a_1 \in [1, 9, 0]$ ,  $a_2 \in [1, 5, 0]$ ,  $t_a = 1$  доба,  $t_b = 0,5$  діб,  $V_{av} = 80$  км/год, при зміні значень  $\omega_\xi$ ,  $\xi = \overline{1,8}$  та  $w = 40$

Значення $\omega_\xi$ , $\xi = \overline{1,8}$	$F, C_{tr}, C_{sort}, C_{load}$ , (у.о.), $U, K_{av}, N_{av}$ , min flow, max flow		$F_0 - F_{min}$ у.о.	$V_{opt}$	$n_1$ $n_2$ $n_3$	$t_{av}$ діб	$t_{sol}$ с
	До оптимізації	Після оптимізації					
10	120950	102064	18885,9	4	<b>8*</b> <b>2</b> <b>0</b>	2.91	0.73
	49485,1	34701,7					
	48345,0	49362,1					
	23119,7	18000,2					
	72, 0.494, 6, 1, 9	56, 0.743, 5, 1, 5					
20	133082	88857,8	44224,1	5	<b>9**</b> <b>1</b> <b>0</b>	3.18	1.25
	57780,9	23174,8					
	50261,4	53122,4					
	25039,6	12560,7					
	78, 0.239, 7, 2, 7	39, 0.697, 3, 1, 3					
40	146189	76699,4	69489,7	4	<b>10</b> <b>0</b> <b>0</b>	3.54	1.72
	67028,4	13573,9					
	50281,4	55044,5					
	28879,2	8080,95					
	90, 0.082, 9, 4, 9	25, 0.630, 2, 1, 2					
60	140601	76254,6	64346,3	5	<b>10</b> <b>0</b> <b>0</b>	3.74	1.86
	61033,6	11226,2					
	50688,0	57587,4					
	28879,2	7440,96					
	90, 0.059, 9, 3, 8	23, 0.561, 2, 1, 2					
80	140043	80402,6	59640,5	4	<b>10</b> <b>0</b> <b>0</b>	3.85	1.88
	59346,2	12792,6					
	51817,7	59529,1					
	28879,2	8080,94					
	90, 0.050, 9, 3, 8	25, 0.433, 2, 1, 2					
100	143423	77772,3	65650,3	6	<b>10</b> <b>0</b> <b>0</b>	3.76	1.92
	64063,9	12421,4					
	50479,6	57590,0					
	28879,2	7760,97					
	90, 0.036, 9, 3, 8	24, 0.346, 2, 1, 1					
120	145194	76851,2	68343,0	6	<b>10</b> <b>0</b> <b>0</b>	3.70	1.84
	66887,2	12702,1					
	49427,7	56388,1					
	28879,2	7760,96					
	90, 0.029, 9, 4, 9	24, 0.269, 2, 1, 1					
140	149449	80561,1	68887,8	3	<b>10</b> <b>0</b> <b>0</b>	3.59	1.78
	69993,0	16033,5					
	50576,7	55486,6					
	28879,2	9040,89					
	90, 0.027, 9, 3, 7	28, 0.160, 2, 1, 2					

\*)  $F_{min} = 102064$  при  $n_2 = 2$  і  $V_{opt} = 4$ ;  $F^* = 102890$  при  $n_2 = 0$  і  $V_{opt} = 2$ ;

$F^* - F_{min} = 826$  у.о., (0,81%). Див. рис. 5.

\*\*)  $F_{min} = 88857,8$  при  $n_2 = 1$  і  $V_{opt} = 5$ ;  $F^* = 88960$  при  $n_2 = 0$  і  $V_{opt} = 3$ ;

$F^* - F_{min} = 102,2$  у.о., (0,115%). Див. рис. 6.

З табл. 1 видно, що зі збільшенням параметра  $w$  і при постійному параметрі  $\omega = 40$  повні витрати, транспортні витрати та витрати на обробку контейнерів після оптимізації структури мережі значно знижуються. Витрати на сортування вантажів збільшуються менш помітно. При  $w = 20$  і  $v_{opt} = 3$  в мережу були введені відповідно 9 вузлів першого типу і один вузол другого типу.

З табл. 2 видно, що при постійному параметрі  $w = 40$  і зі збільшенням параметра  $\omega$  повні витрати і транспортні витрати після оптимізації структури мережі змінюються незначно. При  $\omega = 10$ ,  $v_{opt} = 4$  і  $\omega = 20$ ,  $v_{opt} = 5$  в мережу були введені відповідно 8 вузлів першого типу і два вузли другого типу та 9 вузлів першого типу і один вузол другого типу.

На рис. 4-6 показані діаграми повних витрат у мережі при постійних значеннях параметрів  $\omega = 40$  і  $w = 40$  і при зміні кількості вузлів другого типу, що включаються у мережу.

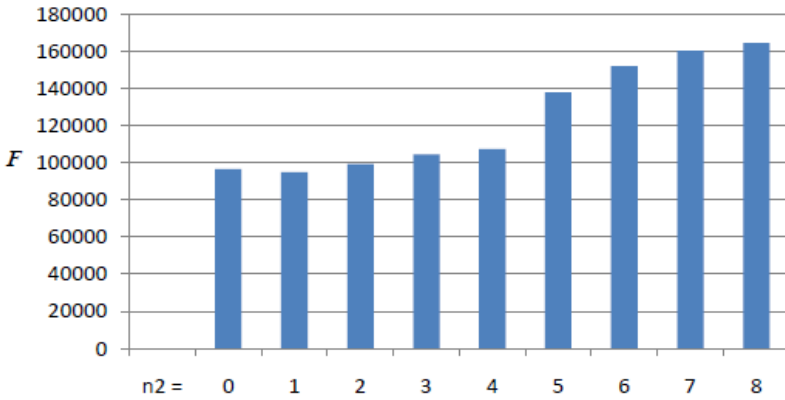


Рис. 4. Значення повних витрат у мережі при постійному значенні параметра  $\omega = 40$  і зміні кількості вузлів другого типу, що включаються у мережу. Значення локальних мінімумів  $F$  до  $n_2 = 4$  відстоять дуже близько один від одного

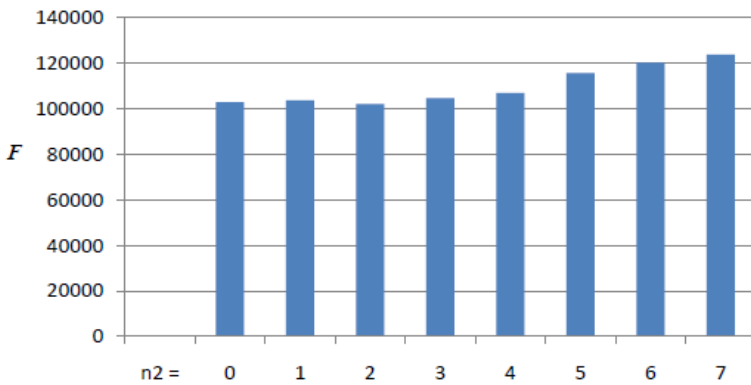


Рис. 5. Значення повних витрат у мережі при постійному значенні параметра  $w = 40$  і зміні кількості вузлів другого типу, що включаються у мережу. Значення локальних мінімумів  $F$  до  $n_2 = 4$  відстоять дуже близько один від одного

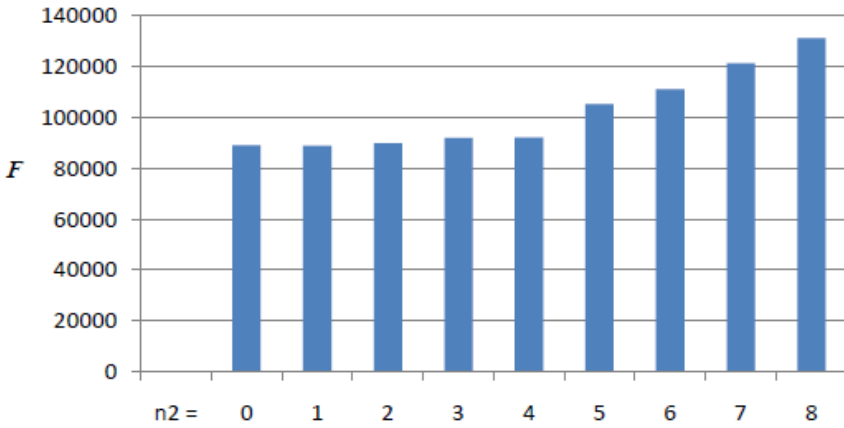


Рис. 6. Значення повних витрат у мережі при постійному значенні параметра  $w = 40$  і зміні кількості вузлів другого типу, що включаються у мережу. Значення локальних мінімумів  $F$  до  $n_2 = 4$  відстоять дуже близько один від одного

З таблиць та рисунків видно, що значення локальних мінімумів  $F$  до деякого порога  $n_2$  відстоять дуже близько один від одного, тому структура мережі слабо змінюється при зміні  $\omega$  та  $w$ , що і було теоретично обґрунтовано і доведено у роботі [25]. Аналізуючи отримані результати, слід очікувати, що при збільшенні розмірності мережі локальні оптимуми будуть не такі близькі, і структура мережі при зміні параметрів  $w$  і  $\omega$  залишатиметься більш стабільною.

На рис. 7 наведено діаграму повних витрат у мережі до – 1, та після – 2 оптимізації, а також отримане зниження витрат після оптимізації – 3 при постійному значенні параметра  $w = 40$  і зміні параметра  $\omega$ .

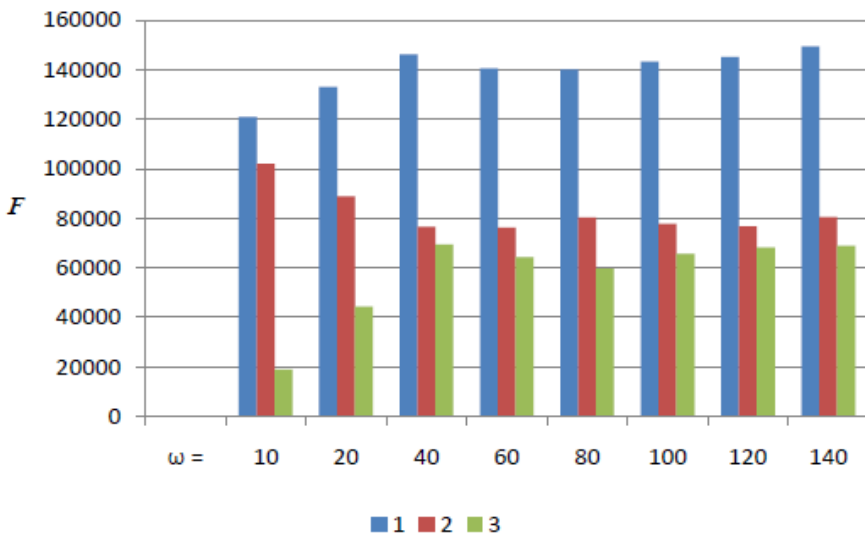


Рис. 7. Значення повних витрат у мережі до – 1, та після – 2 оптимізації, а також отримане зниження витрат після оптимізації – 3 при постійному значенні параметра  $w = 40$  і зміні параметра  $\omega$

Розв'язання задачі проводилося на ПК з процесором *Intel Core 2 Duo* з тактовою частотою 2,66 ГГц та оперативною пам'яттю 2 Гб. Час виконання програми для всіх варіантів рішення не перевищував 2 секунд.

Програмне забезпечення розроблене в середовищі *Microsoft Developer Visual Studio* і може бути адаптоване для роботи в системі паралельного програмування *Intel® Parallel Studio XE 2020*, до якого увійшли останні версії компіляторів C/C++ та Фортран (<https://software.intel.com/ru-ru/try-buy-tools>).

## Висновок

Експериментальне дослідження задачі оптимізації ієрархічної структури комунікаційної мережі показало, що структура мережі слабко змінюється при зміні її найбільш важливих параметрів  $w$  та  $\omega$ . Найкращі результати розв'язку досягаються на близьких один до одного локальних оптимумах, коли значно знижуються повні витрати у мережі, кількість потрібних транспортних блоків та кількість напрямків сортування потоків кореспонденцій, значення мінімального та максимального потоку транспортних блоків по дузі мережі, водночас значно збільшується середній коефіцієнт завантаження транспортного блоку.

Безумовно, проведене експериментальне дослідження на мережах невеликої розмірності не претендує на повноту отриманих результатів для різноманіття можливих складних варіантів структур мережі, однак аналізуючи отримані результати, слід очікувати, що при збільшенні розмірності мережі локальні оптимуми будуть не такі близькі один до одного і структура мережі при зміні параметрів  $w$  і  $\omega$  залишатиметься більш стабільною.

Запропонована комп'ютерна технологія розв'язання задачі при зміні її параметрів дозволяє проєктувальнику в інтерактивному режимі моделювати різні варіанти мережі, змінюючи топологію, ієрархічну структуру, потоки, параметри та обмеження моделі, і з отриманої множини результатів вибирати найкращий варіант з урахуванням обраної цільової функції і прийнятих обмежень; розраховувати попередні техніко-економічні показники функціонування мережі при прогностичних значеннях потоків, оцінювати вартість додаткових ресурсів та планувати величину потрібних інвестицій на модернізацію та будівництво її структурних елементів, що в кінцевому підсумку дає можливість підвищити ефективність функціонування мережі за рахунок оптимізації використання її ресурсів та зниження експлуатаційних витрат на обробку та транспортування потоків.

Математична модель задачі оптимізації ієрархічної структури мережі, а також запропоновані методи і алгоритми її розв'язання можуть бути використані для проєктування магістральних мереж передачі даних з технологією віртуальних контейнерів. Окремі результати роботи можуть з успіхом застосовуватися і до інших мережевих структур – мереж мобільного, поштового зв'язку та ін.

Розроблений інструментарій може бути також використаний для моделювання ієрархічної структури та оптимізації функціонування традиційних логістичних виробничих та транспортно-складських мережевих систем, що включають вузли постачальників сировини, виробництва товарів, склади та кінцевих споживачів, зокрема й у військовій сфері в умовах проведення бойових дій.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Васянин, В.А. (2011). Модели и алгоритмы распределения дискретных многопродуктовых потоков в зональных сетях иерархических структур. *Екологічна безпека та природокористування: Зб. наук. праць*. Київ, 8, 176-190. <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/58222>
2. Васянин, В.А. & Трофимчук, А.Н. (2012). Задача выбора иерархической структуры многопродуктовой коммуникационной сети с мелкопартионными дискретными потоками. *Екологічна безпека та природокористування: Зб. наук. праць*. Київ, 10, 182-204. <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/57543>
3. Трофимчук, А.Н. & Васянин, В.А. (2013). Оптимизация процессов обработки и распределения потоков мелкопартионных грузов в иерархической многопродуктовой транспортной сети. *Sisteme de transport și logistică: Materialele Conferinței Internaționale, Chișinău, 11-13 decembrie 2013 / red. resp.: Dumitru Solomon; col. red.: Dumitru Gortolomei [et al.]. Chișinău: Evrica, ATIC, (Tipogr. AȘM). 317-331. Antetit.: Academia de Transporturi, Informatică și Comunicații.*
4. Trofymchuk, O.M., Ushakova, L.P. & Vasyanin, V.A. (2014). Management and decision making in hierarchical communication networks with discrete flows. V International Conference on Optimization Methods and Applications «Optimization and applications» (OPTIMA-2014) held in Petrovac, Montenegro, September 28 - October 4, Petrovac, Montenegro: Proceedings. Moscow, Russia: ESC Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Russia, 187-188.
5. Трофимчук, А.Н. & Васянин, В.А. (2016). Компьютерное моделирование иерархической структуры коммуникационной сети с дискретными многопродуктовыми потоками. *УСuM*, 2, 48-57. <https://doi.org/10.15407/usim.2016.02.048>
6. Васянин, В.А. (2016). Компьютерное моделирование распределения и маршрутизации дискретных многопродуктовых потоков в коммуникационной сети. *УСuM*, 3, 43-53. <https://doi.org/10.15407/usim.2016.03.043>
7. Трофимчук, А.Н., Ушакова, Л.П. & Васянин, В.А. (2016). Компьютерная технология моделирования иерархической структуры сети с дискретными потоками. *Modelare matematică, optimizare și tehnologii informaționale: Materialele Conferinței Internaționale, Volumul II, Chișinău, 22-25 martie 2016 / red. resp.: Dumitru Solomon; col. red.: Dumitru Lozovanu [et al.]. Chișinău: Evrica, ATIC, (Tipogr. AȘM), 2, 354-365. Antetit.: Academia de Transporturi, Informatică și Comunicații.*
8. Васянин, В.А., Трофимчук, А.Н. & Ушакова Л.П. (2016). Экономико-математические модели задачи распределения потоков в многопродуктовой коммуникационной сети. *Математичне моделювання в економіці*. 2, 5-21. <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/131848>
9. Трофимчук, А.Н., Васянин, В.А. & Ушакова, Л.П. (2021). Исследование задачи оптимизации иерархической структуры разреженной и плотной коммуникационной сети. *Проблемы управления и информатики*, 1, 5-21. <https://doi.org/10.34229/0572-2691-2021-1-1>. [http://nbuv.gov.ua/UJRN/PUI\\_2021\\_1\\_3](http://nbuv.gov.ua/UJRN/PUI_2021_1_3)
10. Трофимчук, А.Н., Васянин, В.А. & Ушакова, Л.П. (2021). Анализ решения задачи оптимизации иерархической структуры разреженной и плотной коммуникационной сети. *International Scientific Conference MATHEMATICAL MODELING, OPTIMIZATION AND INFORMATION TECHNOLOGIES 7th edition (15-19 November, 2021) / Chișinău – Київ – Batum. 333-334. <https://www.youtube.com/watch?v=pNLRCmVeRbI> (видеодоклад).*
11. Vasyanin, V.A., Trofymchuk, O.M. & Ushakova, L.P. (2022). Problem of Groupage Cargo Routing in the Multicommodity Transport Network with Given Tariffs and Delivery Time Constraints. *Cybern Syst Anal.* **58**, 966–976. <https://doi.org/10.1007/s10559-023-00531-z>. <https://rdocu.be/c2Vh9>
12. Cohn, A., Root, S., Wang, A. & Mohr, D. (2007). Integration of the Load Matching and Routing Problem with Equipment Balancing for Small Package Carriers. University of

- Michigan Industrial and Operations Engineering, Technical Report number 05-04. - 2005. 31. (see also *Transportation Science*. 41(2). 238-252). <https://doi.org/10.1287/trsc.1060.0174>
13. E. Hellsten, D.F. Koza, I. Contreras, J.F. Cordeau & D. Pisinger. (2021). The transit time constrained fixed charge multi-commodity network design problem. *Computers & Operations Research*. 136, 105511. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105511>
14. Alessio Trivella, Francesco Corman, David F. Koza & David Pisinger. (2021). The multi-commodity network flow problem with soft transit time constraints: *Application to liner shipping*. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. 150, 102342. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2021.102342>
15. Trofymchuk, O.M. & Vasyanin, V.A. (2015). Simulation of Packing, Distribution and Routing of Small-Size Discrete Flows in a Multicommodity Network. *Journal of Automation and Information Sciences*. 47(7). 15-30. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.30>
16. Vasyanin, V.A. (2015). Problem of Distribution and Routing of Transport Blocks with Mixed Attachments and Its Decomposition. *Journal of Automation and Information Sciences*. 47(2). 56-69. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i2.60>
17. O.M. Trofymchuk, V.A. Vasyanin & V.N. Kuzmenko. (2016). Complexity of one packing optimization problem, *Cybern. Syst. Analysis*, 52(1), 76–84. <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9802-9>
18. O.M. Trofymchuk, V.A. Vasyanin & V.N. Kuzmenko, (2016). Optimization algorithms for packing of small-lot correspondence in communication networks, *Cybern. Syst. Analysis*, 52(2), 258–268. <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9822-5>
19. V.A. Vasyanin. (2014). A Two-Criterion Lexicographic Algorithm for Finding All Shortest Paths in Networks, *Cybernetics and Systems Analysis*, 50(5), 759-767. <https://doi.org/10.1007/s10559-014-9666-9>
20. Васянин, В.А. (2014). Справочная матрица слияния потоков в задачах оптимизации упаковок на многопродуктовых сетях. *Системні дослідження та інформаційні технології*, 3. 42-49. <http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/85552/05-Vasyanin.pdf?sequence=1>
21. Васянин, В.А. & Трофимчук, А.Н. (2010). Автоматизация процессов принятия решений в многопродуктовых коммуникационных сетях с мелкопартионными дискретными потоками. *Екологічна безпека та природокористування: Зб. наук. праць*. Київ, 5, 172-213. <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/19407>
22. Трофимчук, А.Н. & Васянин, В.А. (2015). Информационные технологии поддержки принятия решений в коммуникационных сетях с дискретными потоками. *14 Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях»*, Київ, Пуща-Водиця, 5–9 жовтня 2015 р. Київ, 64-70.
23. Свідectво про реєстрацію авторського права на твір «Комп'ютерна програма оптимізації ієрархічної структури багатопродуктової комунікаційної мережі з дискретними потоками» / заявник і власник О.М. Трофимчук, В.О. Васянин, Л.П. Ушакова; А. с. від 20.07.2016 № 66791, Державна служба інтелектуальної власності України; заявка від 25.05.2016 № 67221 про реєстрацію авторського права на твір.
24. Васянин, В.А. & Ушакова, Л.П. (2015). Балансировка матрицы контейнерных потоков в задаче перевозки мелкопартионных грузов. *Екологічна безпека та природокористування: Зб. наук. праць*. Київ, 17, 98-115. [http://nbuv.gov.ua/UJRN/ebpk\\_2015\\_1\\_13](http://nbuv.gov.ua/UJRN/ebpk_2015_1_13)
25. Методология проектирования многопродуктовых коммуникационных сетей с дискретными потоками [Текст]: дис. ... д-ра техн. наук: 01.05.02 / Васянин Владимир Александрович; НАН Украины, Ин-т телекоммуникаций и глобал. информ. пространства. Киев, 2017. 497 с. [https://itgip.org/wp-content/uploads/2017/03/dis\\_Vas.pdf](https://itgip.org/wp-content/uploads/2017/03/dis_Vas.pdf)

Стаття надійшла до редакції 10.08.2023 і прийнята до друку після рецензування 14.12.2023



## REFERENCES

1. Vasyanin, V.A. (2011). Models and algorithms for the distribution of discrete multicommodity flows in zonal networks of hierarchical structures. *Environmental safety and natural resources: Zb. Sciences. prats*, 8, 176-190 [in Russian]. <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/58222>
2. Vasyanin, V.A. & Trofimchuk, A.N. (2012). The problem of choosing the hierarchical structure of a multicommodity communication network with small batch discrete flows. *Environmental safety and natural resources: Zb. Sciences. Prats*, 10, 182-204 [in Russian]. <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/57543>
3. Trofimchuk, A.N. & Vasyanin, V.A. (2013). Optimization of the processing and distribution of small-lot cargo flows in a hierarchical multiproduct transport network. *Sisteme de transport și logistică: Materialele Conferinței Internaționale, Chișinău, 11-13 decembrie 2013 / red. resp.: Dumitru Solomon; col. red.: Dumitru Gortolomei [et al.]*. Chișinău: Evrica, ATIC, (Tipogr. AȘM). 317-331. Antetit.: Academia de Transporturi, Informatică și Comunicații.
4. Trofymchuk, O.M., Ushakova, L.P. & Vasyanin, V.A. (2014). Management and decision making in hierarchical communication networks with discrete flows. V International Conference on Optimization Methods and Applications «Optimization and applications» (OPTIMA-2014) held in Petrovac, Montenegro, September 28 - October 4, Petrovac, Montenegro: Proceedings. Moscow, Russia: ESC Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Russia, 187-188.
5. Trofimchuk, A.N. & Vasyanin, V.A. (2016). Computer simulation of the hierarchical structure of a communication network with discrete multicommodity flows. *USiM*, 2, 48-57 [in Russian]. <https://doi.org/10.15407/usim.2016.02.048>
6. Vasyanin, V.A. (2016). Computer modeling of distribution and routing of discrete multicommodity flows in a communication network. *USiM*, 3, 43-53 [in Russian]. <https://doi.org/10.15407/usim.2016.03.043>
7. Trofimchuk, A.N., Ushakova, L.P. & Vasyanin, V.A. (2016). Computer technology for modeling the hierarchical structure of a network with discrete flows. *Modelare matematică, optimizare și tehnologii informaționale: Materialele Conferinței Internaționale, Volumul II, Chișinău, 22-25 martie 2016 / red. resp.: Dumitru Solomon; col. red.: Dumitru Lozovanu [et al.]*. Chișinău: Evrica, ATIC, (Tipogr. AȘM), 2, 354-365. Antetit.: Academia de Transporturi, Informatică și Comunicații.
8. Vasyanin, V.A., Trofimchuk, A.N. & Ushakova L.P. (2016). Economic and mathematical models of the problem of distribution of flows in a multicommodity communication network. *Mathematical modeling in economics*, 2, 5-21 [in Russian]. <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/131848>
9. Trofimchuk, A.N., Vasyanin, V.A. & Ushakova, L.P. (2021). Study of the problem of optimizing the hierarchical structure of a sparse and dense communication network. *Problems of management and informatics*, 1, 5-21 [in Russian]. <https://doi.org/10.34229/0572-2691-2021-1-1>. [http://nbuv.gov.ua/UJRN/PUI\\_2021\\_1\\_3](http://nbuv.gov.ua/UJRN/PUI_2021_1_3)
10. Trofimchuk, A.N., Vasyanin, V.A. & Ushakova, L.P. (2021). Analysis of the solution of the problem of optimizing the hierarchical structure of a sparse and dense communication network. In *International Scientific Conference Mathematical modeling, optimization and information technologies* (7th ed., pp. 333-334). Chișinău – Kyiv – Batum [in Russian]. <https://www.youtube.com/watch?v=pNLRCmVeRbI> (video report).
11. Vasyanin, V.A., Trofymchuk, O.M. & Ushakova, L.P. (2022). Problem of Groupage Cargo Routing in the Multicommodity Transport Network with Given Tariffs and Delivery Time Constraints. *Cybern Syst Anal*, 58, 966–976. <https://doi.org/10.1007/s10559-023-00531-z>. <https://rdcu.be/c2Vh9>

12. Cohn, A., Root, S., Wang, A. & Mohr, D. (2007). Integration of the Load Matching and Routing Problem with Equipment Balancing for Small Package Carriers. University of Michigan Industrial and Operations Engineering, Technical Report number 05-04. - 2005. 31. (see also *Transportation Science*, 41(2), 238-252). <https://doi.org/10.1287/trsc.1060.0174>
13. Hellsten, E., Koza, D.F., Contreras, I., Cordeau, J.F. & Pisinger, D. (2021). The transit time constrained fixed charge multi-commodity network design problem. *Computers & Operations Research*, 136, 105511. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105511>
14. Alessio Trivella, Francesco Corman, David F. Koza & David Pisinger. (2021). The multi-commodity network flow problem with soft transit time constraints: *Application to liner shipping*. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. 150, 102342. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2021.102342>
15. Trofymchuk, O.M. & Vasyanin, V.A. (2015). Simulation of Packing, Distribution and Routing of Small-Size Discrete Flows in a Multicommodity Network. *Journal of Automation and Information Sciences*, 47(7), 15-30. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.30>
16. Vasyanin, V.A. (2015). Problem of Distribution and Routing of Transport Blocks with Mixed Attachments and Its Decomposition. *Journal of Automation and Information Sciences*, 47(2), 56-69. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i2.60>
17. Trofymchuk, O.M., Vasyanin, V.A. & Kuzmenko, V.N. (2016). Complexity of one packing optimization problem. *Cybern. Syst. Analysis*, 52(1), 76–84. <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9802-9>
18. Trofymchuk, O.M., Vasyanin, V.A. & Kuzmenko, V.N. (2016). Optimization algorithms for packing of small-lot correspondence in communication networks. *Cybern. Syst. Analysis*, 52(2), 258–268. <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9822-5>
19. Vasyanin, V.A. (2014). A Two-Criterion Lexicographic Algorithm for Finding All Shortest Paths in Networks. *Cybernetics and Systems Analysis*, 50(5), 759-767. <https://doi.org/10.1007/s10559-014-9666-9>
20. Vasyanin, V.A. (2014). Reference Matrix of Flow Merging in Packing Optimization Problems on Multicommodity Networks. *System follow-up and information technologies*, 3, 42-49 [in Russian]. <http://dSPACE.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/85552/05-Vasyanin.pdf?sequence=1>
21. Vasyanin, V.A. & Trofimchuk, A.N. (2010). Automation of decision-making processes in multi-product communication networks with small batch discrete flows. *Environmental safety and natural resources: Zb. Sciences. prats*, 5, 172-213 [in Russian]. <http://dSPACE.nbuv.gov.ua/handle/123456789/19407>
22. Trofimchuk, A.N. & Vasyanin, V.A. (2015). Information technologies for decision support in communication networks with discrete flows. In *14 International scientific and practical conference "Modern information technologies for the management of environmental safety, environmental protection, visits in extreme situations"* (pp. 64-70). Kyiv [in Russian].
23. Certificate of copyright registration for the work "Computer program for optimizing the hierarchical structure of a multi-product communication network with discrete flows". Applicant and owner O.M. Trofymchuk, V.O. Vasyanin, L.P. Ushakova; A. p. dated 07/20/2016 No. 66791, State Intellectual Property Service of Ukraine; application dated 05/25/2016 No. 67221 on registration of copyright to the work.
24. Vasyanin, V.A. & Ushakova, L.P. (2015). Balancing the matrix of container flows in the problem of small-lot cargo transportation. *Environmental safety and natural resources: Zb. Sciences. prats*, 17, 98-115 [in Russian]. [http://nbuv.gov.ua/UJRN/ebp\\_k\\_2015\\_1\\_13](http://nbuv.gov.ua/UJRN/ebp_k_2015_1_13)
25. Vasyanin, V.A. (2017). Methodology for designing multicommodity communication networks with discrete flows, Doctoral Thesis, Kyiv [in Russian]. [https://itgip.org/wp-content/uploads/2017/03/dis\\_Vas.pdf](https://itgip.org/wp-content/uploads/2017/03/dis_Vas.pdf)

*The article was received 10.08.2023 and was accepted after revision 14.12.2023*

**Васянін Володимир Олександрович**

доктор технічних наук, старший науковий співробітник, завідувач відділу прикладної інформатики, Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України

**Адреса робоча:** 03186, Україна, м. Київ, Чоколівський бульвар, 13

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-4046-5243> **e-mail:** archukr@meta.ua

**Трофимчук Олександр Миколайович**

член-кореспондент НАН України, доктор технічних наук, професор, директор, Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України

**Адреса робоча:** 03186, Україна, м. Київ, Чоколівський бульвар, 13

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-3358-6274> **e-mail:** itgis@nas.gov.ua

**Ушакова Людмила Павлівна**

провідний інженер відділу прикладної інформатики, Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України

**Адреса робоча:** 03186, Україна, м. Київ, Чоколівський бульвар, 13

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-9020-1329> **e-mail:** archukr@i.ua